

رفتار مالی و تخمین ریسک در بهینه سازی پرتفوی تصادفی

محمدرضا اسمعیلی مقدم^۱

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۰۱ تاریخ چاپ: ۱۴۰۳/۰۵/۰۷

چکیده

هدف از این مقاله دو قسمت است. اولین مورد این است که حسابداری ذهنی، ضررگریزی، رفتار ریسک پذیری نامتقارن و وزن دهی احتمال را در یک بهینه سازی سبد چند دوره ای برای سرمایه گذاران فردی بگنجانیم. در حالی که این سوگیری های رفتاری قبلاً در ادبیات شناسایی شده اند، تأثیر کلی آنها در طول تعیین تخصیص بهینه دارایی در تحلیل چند دوره ای هنوز وجود ندارد. هدف دوم در نظر گرفتن ریسک تخمینی در تحلیل است. با در نظر گرفتن ۲۶ داده شاخص روزانه سهام در بازه زمانی ۱۹۹۵ تا ۲۰۰۷، ما به طور تجربی مدل خود (BRATE - تکنیک نمونه گیری مجدد رفتار) را در برابر مدل سنتی مارکوفیتز ارزیابی می کنیم.

واژگان کلیدی

رفتار، بهینه سازی نمونه کارها، نمونه گیری مجدد

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت مالی، واحد علوم تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

R.moghadam.rm@gmail.com

مقدمه

در یک روش تخصیص دارایی استاندارد، زمانی که تحمل ریسک، محدودیت‌ها و اهداف مالی تعیین شد، خروجی با یک بهینه‌سازی میانگین-واریانس ارائه می‌شود (مارکوویتز^۱، ۱۹۵۲؛ فلدمن و رایسمن^۲، ۲۰۰۲). متأسفانه، این روش احتمالاً برای افرادی که مستعد سوگیری‌های رفتاری هستند، کارایی لازم را نخواهد داشت. به عنوان مثال، در پاسخ به حرکات کوتاه‌مدت بازار و به ضرر برنامه سرمایه‌گذاری بلندمدت، سرمایه‌گذار فردی ممکن است نیاز به تغییر تخصیص دارایی خود داشته باشد. فرناندس و همکاران^۳ (۲۰۰۷) پیشنهاد می‌کنند که انحلال زود هنگام یک سرمایه‌گذاری بلندمدت ممکن است علت این تغییرات باشد.

علاوه بر این، پارادایم فعلی رفتار فردی در تئوری مالی مبتنی بر حداکثرسازی مطلوبیت مورد انتظار و ریسک‌گریزی است که در سال‌های اخیر به دلیل عدم دقت توصیفی آن مورد نقد قرار گرفته است. روانشناسان تجربی نشان داده‌اند که افراد به طور سیستماتیک از پیش‌بینی‌های انتخابی که پارادایم کلاسیک نشان می‌دهد، منحرف می‌شوند، زیرا افراد معمولاً مغرضانه هستند.

سوگیری‌های رفتاری را می‌توان تقریباً به دو دسته تقسیم کرد: شناختی و عاطفی، هرچند هر دو نوع منجر به تصمیمات غیرمنطقی می‌شوند. از آنجایی که سوگیری‌های شناختی (ابتکارهای اکتشافی مانند لنگر انداختن، در دسترس بودن، و سوگیری‌های نمایندگی) از استدلال نادرست ناشی می‌شوند، اطلاعات و توصیه‌های بهتر اغلب می‌تواند آنها را اصلاح کند. برعکس، سوگیری‌های عاطفی، مانند پشیمانی و بیزاری از دست دادن، از احساسات یا شهود تکانشی سرچشمه می‌گیرند و به سختی قابل اصلاح هستند (لو و همکاران^۴، ۲۰۰۵). لو و همکاران (۲۰۰۵) چندین ارتباط احتمالی بین عوامل روانشناختی و عملکرد معاملاتی را بررسی کردند و دریافتند که افرادی که واکنش عاطفی آنها به سود و زیان پولی شدیدتر بود، عملکرد معاملاتی به‌طور قابل توجهی بدتری داشتند.

از نظر سوگیری‌های عاطفی، چندین مطالعه تجربی تئوروسکی و کاهنمن^۵، (۱۹۹۲) نشان داده‌اند که، هنگام برخورد با سود، عوامل ریسک‌گریز هستند، اما زمانی که انتخاب‌ها متضمن زیان هستند، عوامل ریسک‌جو هستند (رفتار ریسک‌پذیر نامتقارن). علاوه بر این، در طیف گسترده‌ای از حوزه‌ها، افراد به‌طور قابل توجهی نسبت به زیان‌ها بیزارتر از اینکه به سودهای هم اندازه جذب شوند رابین^۶، (۱۹۹۸). زیان‌گریزی اشمیت و زانک^۷، (۲۰۰۵) یک مفهوم روانشناختی مرتبط است که به تحلیل مالی و اقتصادی وارد شده است و پایه و اساس نظریه چشم‌انداز را تشکیل می‌دهد.

به طور کلی، نظریه چشم‌انداز و نسخه آخر آن نظریه چشم‌انداز تجمعی کانمن و تورسکی^۸، (۱۹۷۹، ۱۹۹۲) چهار مفهوم جدید را در چارچوب "ترجیحات ریسک" افراد مطرح می‌کند: اول، افراد نسبت به زیان‌ها حساس‌تر از سودهای هم‌اندازه هستند (زیان‌گریزی). دوم، افراد تمایل دارند که نتایج را به‌صورت جداگانه ارزیابی کنند نه به‌صورت کلی (حسابداری ذهنی). سوم، افراد در حوزه زیان ریسک‌جو و در حوزه سود ریسک‌گریز هستند (ترجیح ریسک نامتقارن).

¹ Markowitz

² Feldman and Reisman

³ Fernandes et al

⁴ Lo et al

⁵ Tversky and Kahneman

⁶ Rabin

⁷ Schmidt and Zank

⁸ Tversky and Kahneman

در نهایت، افراد احتمالات شدید را به گونه‌ای ارزیابی می‌کنند که احتمالات کم را بیش از حد برآورد می‌کنند و احتمالات بالا را دست کم می‌گیرند (تابع وزن‌دهی احتمال). این مطالعه، تا آنجا که می‌دانیم، اولین مطالعه‌ای است که تمام آن جنبه‌ها را در چارچوب انتخاب پورتفولیو بررسی می‌کند.

نتایج متناقضی در ادبیات مالی در مورد چگونگی تأثیر نتایج قبلی بر رفتار ریسک‌پذیر سرمایه‌گذاران در دوره‌های بعدی وجود دارد. زیان‌گریزی پیش‌بینی می‌کند که معامله‌گران با سودهای صبح، قرار گرفتن در معرض ریسک بعد از ظهر خود را کاهش می‌دهند، سعی می‌کنند از ضرر جلوگیری کنند و در نتیجه سودهای قبلی را تضمین کنند و بر و زوکیل^۹، (۲۰۰۳). اودین^{۱۰} (۱۹۹۸) و وبر و کامر^{۱۱} (۱۹۹۸) نشان داده‌اند که سرمایه‌گذاران تمایل بیشتری به فروش سهامی دارند که بالاتر از قیمت خرید (برنده‌ها) معامله می‌کنند تا سهامی که زیر قیمت خرید (بازنده‌ها) معامله می‌کنند. این پدیده به اثر انحراف شفرین و استاتمن^{۱۲}، (۱۹۸۵) معروف است. هر دو اثر این رفتار را به عنوان شاهدی بر کاهش ریسک‌گریزی پس از ضرر و افزایش ریسک‌گریزی پس از سود تفسیر کردند. توضیح استاندارد این رفتار مبتنی بر تئوری چشم‌انداز است و به‌ویژه بر این واقعیت که افراد در حوزه زیان‌ها ریسک‌پذیر هستند و در حوزه سود ریسک‌گریز هستند (ترجیح ریسک نامتقارن).

با این حال، جریان دیگری از ادبیات رفتار مخالف پیدا کرد. تالر و جانسون^{۱۳} (۱۹۹۰) اثر پول‌خانه را، رفتار افزایش اشتباهی ریسک پس از سود نام می‌برند. باربریس^{۱۴} و همکاران (۲۰۰۱) مدلی را ارائه می‌کنند که در آن سرمایه‌گذاران پس از سود، تمایل کمتری به ضرر دارند در حالی که پس از زیان‌های قبلی، بیشتر متمایل به ضرر می‌شوند. مدل پیشنهادی ما به تضاد قبلی بین پول‌خانه و اثر تسویه پرداخته و روشن می‌کند.

با وجود ادبیات گسترده‌ای که سوگیری‌های رفتاری مرتبط با تئوری چشم‌انداز را تأیید می‌کند، در نظر گرفتن همه آن سوگیری‌ها در چارچوب تخصیص دارایی هنوز وجود ندارد. باربریس و هوانگ^{۱۵} (۲۰۰۱) و باربریس، هوانگ و سانتوس^{۱۶} (۲۰۰۱) از زیان‌گریزی و حسابداری ذهنی تالر^{۱۷}، (۱۹۹۹) برای توضیح جنبه‌های رفتار قیمت سهام استفاده می‌کنند، اما چارچوب تئوری چشم‌انداز کامل را به کار نمی‌گیرند و بهینه‌سازی تخصیص دارایی‌ها را بررسی نمی‌کنند. بنارتزی^{۱۸} و تالر (۱۹۹۵) نظریه چشم‌انداز را برای حل معمای حق بیمه در نظر می‌گیرند، زمانی که سرمایه‌گذاران از دست دادن بیزارند و سبدهای خود را با افق تقریباً یک‌ساله ارزیابی می‌کنند. دیویس و ساچل^{۱۹} (۲۰۰۴) راه‌حلی برای تخصیص بهینه سهام ارائه می‌دهند و فضای پارامتر تئوری چشم‌انداز تجمعی را که با توجه به توزیع بازده یک بازار مالی در یک افق یک‌ماهه مطابقت دارد، به‌طور کامل‌تری بررسی می‌کنند. آنها همچنین سرمایه‌گذاران ناهمگن را برای مشاهده تأثیر مفاهیم رفتاری در چارچوب قیمت‌گذاری دارایی در نظر می‌گیرند.

⁹ Weber and Zuchel

¹⁰ Odean

¹¹ Weber and Camerer

¹² Shefrin and Statman

¹³ Thaler and Johnson

¹⁴ Barberis

¹⁵ Huang

¹⁶ Santos

¹⁷ Thaler

¹⁸ Benartzi

¹⁹ Davis and Satchell

اولین هدف اصلی این مطالعه، گنجاندن حسابداری ذهنی، زیان‌گریزی، ترجیح ریسک نامتقارن، اثر موقعیت و وزن‌دهی احتمالی در بهینه‌سازی پورتفولیو در یک تنظیم چند دوره‌ای برای سرمایه‌گذاران فردی است. ما راه‌حلی را برای مشکل تخصیص دارایی با در نظر گرفتن تمام سوگیری‌های رفتاری مرتبط با نظریه چشم‌انداز و با استفاده از یک تابع سودمندی (پیشنهاد شده در جیورجی^{۲۰} و همکاران، (۲۰۰۴)) ارائه می‌دهیم که با نتایج تجربی تورووسکی و کاهنمن و همچنین با وجود تعادل سازگار است. ما همچنین درباره چگونگی تأثیر نتایج قبلی بر رفتار ریسک‌پذیری بعدی، بررسی رفتار ریسک‌پذیر سرمایه‌گذار به دنبال افزایش یا کاهش قیمت دارایی پرخطر، روشن کردیم.

در راستای تئوری چشم‌انداز، سرمایه‌گذاران سودمندی را از نوسانات ارزش ثروت نهایی خود می‌گیرند. در چارچوب ما، یک بازار مالی وجود دارد که در آن دو دارایی معامله می‌شود: دارایی بدون ریسک، که اوراق قرضه نیز نامیده می‌شود، و دارایی پرریسک که سهام نیز نامیده می‌شود (با فرض بازده توزیع شده عادی برای دارایی پرخطر). از آنجایی که ما در حال مدل‌سازی فرآیند چند دوره‌ای هستیم، فرض می‌کنیم که افق سرمایه‌گذار به دو دوره تقسیم می‌شود. سرمایه‌گذار با نسبت خاصی از دارایی بدون ریسک و دارایی پرریسک شروع می‌کند و به دنبال تعیین ترکیب بهینه برای هر دو دوره است. ما همچنین تحلیل حساسیت را با تغییر درجه زیان‌گریزی، ضریب ریسک‌پذیری و تعداد دوره‌ها انجام دادیم.

در نهایت، این مطالعه به بررسی چگونگی تغییر نرخ تخصیص دارایی در طول زمان به دلیل تغییر در ریسک‌پذیری سرمایه‌گذاران در اثر سود یا زیان گذشته و رفتار آنها با توجه به این تغییرات می‌پردازد. ما این رفتار را در دو دوره متوالی بررسی کرده و راه‌حلی برای مشکل تخصیص دارایی ارائه داده‌ایم که به‌طور کامل تمام سوگیری‌های رفتاری مربوط به نظریه چشم‌انداز را در بر می‌گیرد.

مدل رفتاری

ما یک مدل دو دوره‌ای برای انتخاب پرتفوی در یک بازار مالی ارائه می‌دهیم، که تنها از دو دارایی تشکیل شده است. این مدل بر اساس نظریه چشم‌انداز تجمعی است که توسط تورووسکی و کاهنمن (۱۹۷۹) پیشنهاد شده است، طراحی شده است. در چارچوب ما، بازار مالی شامل دو دارایی است: دارایی بدون ریسک (یا اوراق قرضه) و دارایی پرریسک (سهام).

بازده سهام را در هر دوره ارائه شده توسط فرآیند زیر در نظر بگیریم: $R = \mu + \sigma n$ ، با $n \sim N(0, 1)$ اوراق قرضه بدون ریسک بازده مطمئن R_f را به همراه دارد. ما فرض می‌کنیم که ارزش زمانی از پول مثبت است، یعنی نرخ بهره غیرمنفی است.

ترجیحات سرمایه‌گذار بر اساس تغییرات در ثروت است و توسط نظریه چشم‌انداز توصیف می‌شود. فرض می‌کنیم که ما صاحب یک موقوفه اولیه، W_0 (به ۱ واحد پولی عادی شده) هستیم و هیچ درآمد دیگری به دست نمی‌آوریم. عامل نسبت θ از ثروت خود را در سهام و $(1-\theta)$ در اوراق قرضه سرمایه‌گذاری می‌کنیم. از آنجایی که می‌خواهیم رفتار یک سرمایه‌گذار را مدل‌سازی کنیم، فرض می‌کنیم که فروش کوتاه مدت مجاز نیست. ($0 \leq \theta \leq 1$) همچنین فرض می‌کنیم که سرمایه‌گذار نزدیک‌بینانه عمل می‌کند، و نقطه مرجعی که سود و زیان خود را در دوره اول اندازه‌گیری می‌کند. ثروت اولیه اوست سپس سود یا زیان در ک شده در پایان دوره اول به وسیله:

²⁰ Giorgi

$$x = \Delta W = \left[(1 - \theta)W_f (1 + R_f) + \theta W (1 + R) \right] - W. \quad \text{معادله ۱}$$

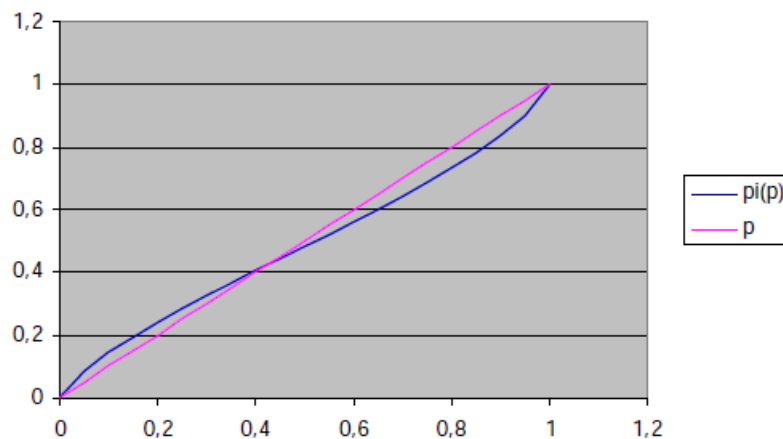
$$\therefore x = (1 - \theta)R_f + \theta R$$

$$\therefore x = (1 - \theta)R_f + \theta(\mu + \sigma n) \quad (\text{Eq. ۱})$$

همانطور که در ولچک^{۲۱} (۲۰۰۶) اشاره شد، فرآیند انتخاب تحت تئوری چشم انداز با مرحله ویرایش شروع می شود و پس از آن ارزیابی چشم اندازهای ویرایش شده انجام می شود و در نهایت جایگزین با بالاترین ارزش انتخاب می شود. در مرحله ویرایش، عوامل سود و زیان را از هم متمایز می کنند. آنها همچنین تنظیمات ذهنی اضافی را در تابع احتمال اصلی انجام می دهند. $P=f(x)$ ، تابع وزن دهی احتمال $\pi(p)$ را تعریف می کنند. ما تابع وزن دهی احتمال را در نظر می گیریم، همانطور که در جیورجی و همکاران (۲۰۰۴) ارائه شده است:

$$\pi(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad \text{معادله ۲}$$

جایی که γ ضریب تعدیل است. نمودار زیر مقادیر p و $\pi(p)$ را با در نظر گرفتن $\gamma = 0.80^2$ مقایسه می کند.



شکل ۱ - تابع وزن دهی احتمال تجمعی برای $\gamma = 0.80$

در مرحله ارزش گذاری، عوامل یک ارزش ذهنی برای قمار قائل می شوند. اجازه دهید تابع مقدار پیشنهاد شده توسط جیورجی و همکاران (۲۰۰۴)، را فرض کنیم. به شرح زیر:

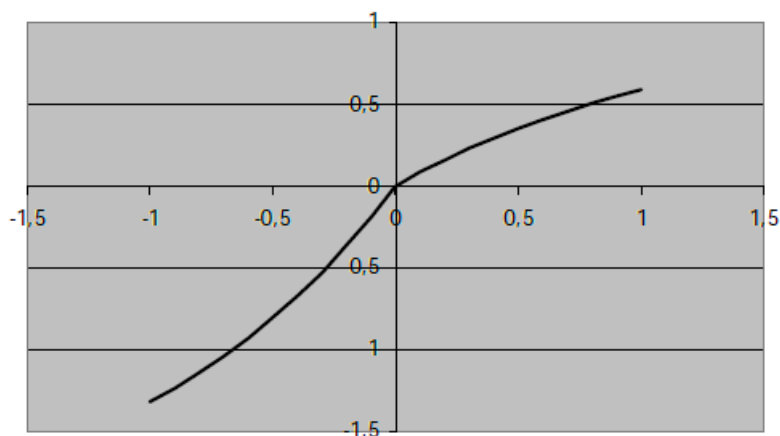
$$v(x) = \begin{cases} \lambda^+ - \lambda^+ e^{-\alpha x}, & \text{if } x \geq 0 \\ \lambda^- e^{\alpha x} - \lambda^-, & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad \text{معادله ۳}$$

که در آن α ضریب اولویت ریسک مطلق است، $\lambda^+ > \lambda^- > 0$ تابع ارزش را در سمت منفی تندتر می کند (زیان گریزی)، و X تغییر در ثروت یا رفاه، به جای حالت های نهایی (حسابداری ذهنی) است. همانطور که توسط کانمن و تورسکی (۱۹۷۹) پیشنهاد شده است. همچنین تابع مقدار بالای نقطه مرجع مقعر و در زیر آن محدب است (ترجیح ریسک نامتقارن). به دلیل وجود یک تعادل CAPM و توانایی دستیابی به ضرایب ثابت ترجیح ریسک (α) در نظر

²¹ Vlcek

گرفتن شکل قبلی برای تابع ارزش مفید است. فرمول قبلی نیز توسط نتایج آزمایشگاهی بوش-دومینگ و سیلوستره (۲۰۰۳) پشتیبانی می شود. نمودار زیر نشان می دهد.

(۱) $\lambda^+ = 1$ and $\lambda^- = 2.25$ when $\alpha = 0.88$ (مقادیر پیشنهادی کانمن و تورسکی).



شکل ۲- تابع ارزش نظریه چشم انداز برای $\alpha = 0.88$, $\lambda^- = 2.25$, $\lambda^+ = 1$

در مدل دو دوره ای برای انتخاب پرتفوی، سرمایه گذار وزنی را در دارایی پرخطر انتخاب می کند تا مطلوبیت مورد انتظار آن (V) را به حداکثر برساند. ترجیحات بر اساس تغییرات در ثروت او (x) است و توسط نظریه چشم انداز توصیف شده است. مقدار کل مورد انتظاری که او به یک انتخاب معین از θ خطاب می کند به صورت زیر داده می شود:

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \frac{d}{dx} \pi(f(x)) dx \quad \text{معادله ۴}$$

که در آن $v(x)$ مقدار احتمالی نتیجه x است و $\pi(f(x))$ احتمال تجمعی وزنی مرتبط با آن نتیجه است. نظریه چشم انداز یک نظریه توصیفی است که فرض می کند در مقایسه گزینه ها، سرمایه گذار جایگزینی را انتخاب می کند که V را تا حد امکان بالا می برد. سپس اجازه دهید مشکل سرمایه گذار را در هر دوره ارزیابی کنیم.

اولین دوره

در دوره اول، مشکل نماینده شامل تعریف تخصیص ثروت اولیه او بین دو دارایی معامله شده در بازار مالی است. با تخصیص کسری، θ ، از ثروت اولیه خود، W ، در دارایی پرخطر و $(1-\theta)$ در دارایی بدون ریسک، مطلوبیت خود را در $t=0$ به حداکثر می رساند. ما در نظر می گیریم که سرمایه گذار یک بهینه ساز نزدیک بینی است به این معنا که او فقط نتیجه دوره اول را در نظر می گیرد. برای افق های چند دوره ای، انتخاب ها در تاریخ های قبلی بر نقاط مرجع در تاریخ های بعدی تأثیر می گذارد. این ویژگی امکان مدل سازی پیچیده را فراهم می کند. با این حال، همانطور که در شفرین^{۲۲} (۲۰۰۵) اشاره شد، نظریه چشم انداز نظریه ای در مورد سرمایه گذارانی است که بیش از حد ساده سازی می کنند، و بنابراین، فرض اینکه افراد به اندازه کافی پیچیده هستند تا ارتباط بین انتخاب های فعلی و نقاط مرجع آینده خود را درک کنند، چیزی غیرمنطقی است. ما همچنین فروش کوتاه مدت را محدود می کنیم، زیرا این امر برای مدل های سرمایه گذاران فردی رایج است. بنابراین، حل مشکل می تواند توسط :

²² Shefrin

$$\max_{\theta \leq 1} V = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \frac{d}{dx} \pi(f(x)) dx \quad \text{معادله ۵}$$

اشتقاق زیر را انجام دهیم:

$x = (1 - \theta) R_f + \theta (\mu + \sigma n)$ با مرتب کردن مجدد عبارت ها در x دریافت می کنیم
 $(1 - \theta_0) R_f + \theta_0 \mu + \theta_0 \sigma = B + Cn$ با جایگذاری $\theta_0 \sigma = C$ و $(1 - \theta_0) R_f + \theta_0 \mu = B$
 بنابراین این $X > 0$ به این معنی است $n > -\frac{B}{C}$ پس:

معادله ۶

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \frac{d}{dx} \pi(f(x)) dx \\ \therefore V &= \int_{-\infty}^{\infty} (-\lambda^+ e^{-ax} + \lambda^+) d\pi(f(x)) + \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^- e^{ax} - \lambda^-) d\pi(f(x)) \\ \therefore V &= \int_{-\frac{B}{C}}^{\infty} (-\lambda^+ e^{-\alpha(B+Cn)} + \lambda^+) d\pi(f(n)) + \int_{-\infty}^{-\frac{B}{C}} (\lambda^- e^{\alpha(B+Cn)} - \lambda^-) d\pi(f(n)) \\ \therefore V &= \lambda^+ \left(1 - \hat{\pi} \left(-\frac{B}{C} \right) \right) - \lambda^- \pi \left(-\frac{B}{C} \right) + \lambda^- e^{aB} \int_{-\infty}^{-\frac{B}{C}} e^{anC} d\pi(f(n)) - \lambda^+ e^{-aB} \int_{-\frac{B}{C}}^{\infty} e^{-anC} d\pi(f(n)) \\ \therefore V &= \lambda^+ - (\lambda^+ + \lambda^-) \pi \left(-\frac{B}{C} \right) + \lambda^- e^{aB} \int_{\frac{B}{C}}^{-anC} d\pi(f(n)) - \lambda^+ e^{-aB} \int_{-\frac{B}{C}}^{-anC} d\pi(f(n)) \\ \therefore V &= \lambda^+ - (\lambda^+ + \lambda^-) \pi \left(-\frac{B}{C} \right) + e^{\frac{1}{2} a^2 \sigma^2 \frac{B}{C}} \left[\lambda^- e^{aB} \pi \left(-\frac{B}{C} - \alpha C \right) - \lambda^+ e^{-aB} \pi \left(\frac{B}{C} - \alpha C \right) \right] \end{aligned}$$

جایی که برای آخرین مرحله از آن استفاده کردیم:

$$\int_z^{\infty} e^{-\alpha \sigma x} d\phi(x) = e^{\frac{1}{2} a^2 \sigma^2} \hat{\phi}(-\alpha \sigma - z)$$

توجه داشته باشید که اگر ما یک تابع مطلوبیت استاندارد (ریسک گریزی نسبت به همه نتایج ممکن) را در نظر بگیریم،
 مقدار به صورت زیر داده می شود:

معادله ۷

$$V^S = \lambda^+ - \lambda^+ e^{-aB + \frac{1}{2} a^2 \sigma^2 \frac{B}{C}}$$

علاوه بر این، مشتقات جزئی V (معادله ۶) عبارتند از:

معادله ۸

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = \left\{ \alpha e^{\frac{1}{\sigma} \alpha^{\sigma} (\theta, \sigma)^{\sigma}} \left[\lambda^{-} e^{\alpha \left[(1 - \theta, \cdot) R_f + \theta, \mu \right]} \pi \left(- \frac{\left[(1 - \theta, \cdot) R_f + \theta, \mu \right]}{\theta, \sigma} - \alpha \theta, \sigma \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \lambda^{+} e^{-\alpha \left[(1 - \theta, \cdot) R_f + \theta, \mu \right]} \hat{\pi} \left(\frac{\left[(1 - \theta, \cdot) R_f + \theta, \mu \right]}{\theta, \sigma} - \alpha \theta, \sigma \right) \right] \right\} \cdot \theta, \cdot$$

معادله ۹

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \left\{ \alpha^{\sigma} \theta, \sigma e^{\frac{1}{\sigma} \alpha^{\sigma} (\theta, \sigma)^{\sigma}} \left[\lambda^{-} e^{\alpha B} \pi \left(- \frac{\left[(1 - \theta, \cdot) R_f + \theta, \mu \right]}{\theta, \sigma} - \alpha \theta, \sigma \right) - \right. \right. \\ \left. \left. \lambda^{+} e^{-\alpha \left[(1 - \theta, \cdot) R_f + \theta, \mu \right]} \pi \left(\frac{\left[(1 - \theta, \cdot) R_f + \theta, \mu \right]}{\theta, \sigma} - \alpha \theta, \sigma \right) \right] \right. \\ \left. - \alpha (\lambda^{-} - \lambda^{+}) \pi \left(\frac{\left[(1 - \theta, \cdot) R_f + \theta, \mu \right]}{\theta, \sigma} \right) \right\} \cdot \theta, \cdot$$

در نتیجه، ویژگی‌های زیر را حفظ می‌کنند:

- i) $\frac{\partial V}{\partial \mu} > 0$;
- ii) $\frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0$ for $\sigma = 0$ or $\sigma = \infty$;
- iii) $\frac{\partial V}{\partial \sigma} < 0$ for $\sigma > 0$.

معادلات ۶ و ۷ با در نظر گرفتن ثابت بودن پارامترهای باقیمانده، به وضوح وزن‌های متفاوتی را برای دارایی دارای ریسک به دست می‌دهند. بنابراین، می‌توان هزینه ناکارآمدی مرتبط با سوگیری‌های رفتاری را در مقایسه با راه حل استاندارد استاندارد ارزیابی کرد.

معادله ۱۰

$$\text{Cost} = \left[(1 - \theta,^S) R_f + \theta,^S R \right] \\ - \left[(1 - \theta,^{PT}) R_f + \theta,^{PT} R \right]$$

که در آن θ_0^S وزن دارایی پرخطر است که توسط مسئله حداکثرسازی مطلوبیت استاندارد داده شده است، و θ_0^{PT} وزن سهام است که در مدل ما تعریف شده است.

تخصیص بهینه دارایی در $t = 0$ ، برای دارایی پرخطر θ_0^* به گونه ای است که تابع ارزش داده شده توسط:

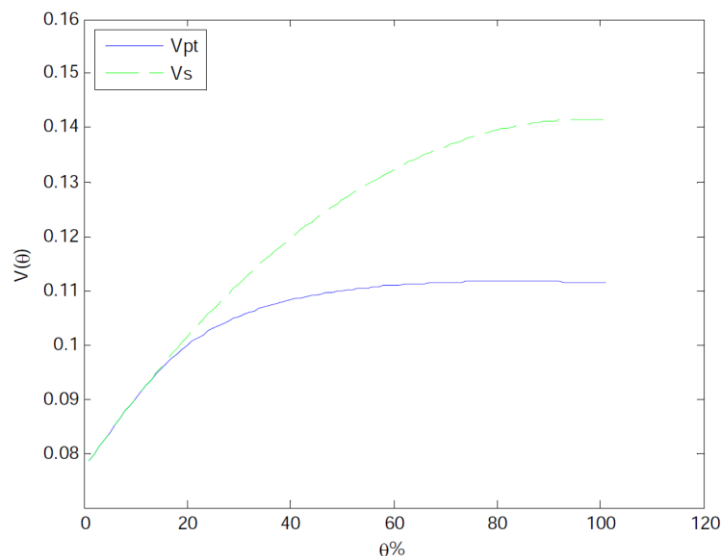
$$V = \lambda^+ - (\lambda^+ + \lambda^-) \pi \left(-\frac{B}{C} \right) + e^{\frac{1}{\gamma} \alpha^{\frac{1}{\gamma}} C^{\frac{1}{\gamma}}} \left[\lambda^- e^{aB} \pi \left(-\frac{B}{C} - \alpha C \right) - \lambda^+ e^{-aB} \pi \left(\frac{B}{C} - \alpha C \right) \right]$$

که $B = \left[(1 - \theta^*) R_f + \theta^* \mu \right]$ and $C = \theta^* \sigma$. زمانی که

اگر ما یک تابع مطلوبیت استاندارد را در نظر بگیریم، تخصیص بهینه در $t = 0$ ، برای دارایی پرخطر به صورت زیر داده می شود:

$$\theta^* = \frac{\mu - R_f}{\alpha \sigma^{\frac{1}{\gamma}}}$$

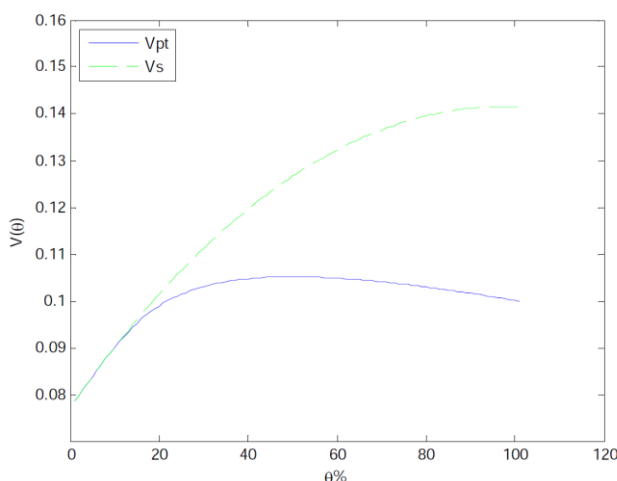
ابتدا مقادیر استاندارد را برای پارامترهای مدل در نظر بگیریم. نرخ بدون ریسک برابر با بازده تاریخی سالانه اسناد خزانه داری سه ماهه ایالات متحده است ($R_f = 2.73\%$). بازده مورد انتظار سهام و نوسانات برابر با میانگین تاریخی است. شاخص سهام جهانی MSCI و انحراف استاندارد آن ($\mu = 7.61\%$ و $\sigma = 12.98\%$) ضریب تعدیل در تابع وزن دهی برابر است با $\gamma = 90$ ضریب ریسک گریزی $\alpha = 3$. پیشنهاد شده توسط کانمن و تورسکی، $\lambda^+ = 2.25$ و $\lambda^- = 1$ ارزش های افراد (نظریه چشم انداز و استاندارد) به عنوان تابعی از درصد ثروت سرمایه گذاری شده آنها در دارایی پرخطر در شکل ۳ آورده شده است. انتظار می رود که سرمایه گذار منفرد تخصیص دارایی پرخطر را انتخاب کند که ارزش مورد انتظار آن را به حداکثر برساند.



شکل ۳ - ارزش چشم انداز و ارزش مطلوب استاندارد به عنوان تابعی از θ

همانطور که از نمودار مشاهده می شود، با استفاده از یک تابع مطلوبیت استاندارد، تخصیص در دارایی پرخطر به 100% نزدیک می شود (تتا که تابع ارزش به حداکثر خود می رسد)، در حالی که با استفاده از ابزار نظریه چشم انداز، سرمایه گذار باید 81% از دارایی خود را تخصیص دهد. در انبار. شکل نمودارها، به ویژه برای تخصیص های بزرگ در سهام، متفاوت است. تابع مقدار با استفاده از ابزار استاندارد برابر یا بزرگتر از تابع مطلوبیت آینده نگر است.

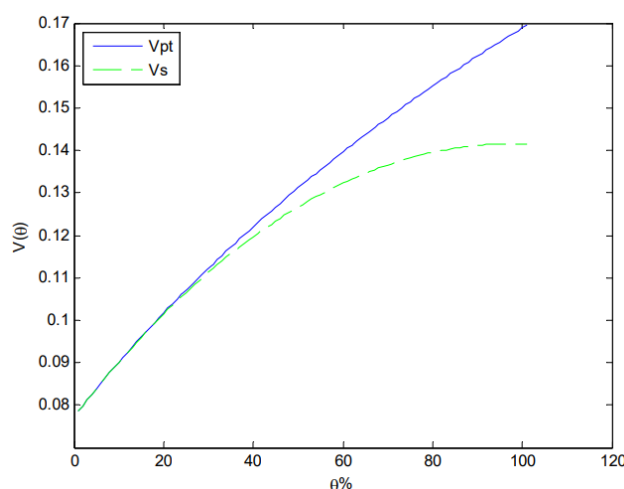
دلیل این تفاوت از این واقعیت ناشی می‌شود که در تئوری چشم انداز، نتایج منفی بیشتر جریمه می‌شوند (همانطور که پرتفوی های مخاطره آمیز هستند) زیرا افراد از ضرر بیزار هستند ($\lambda^- > \lambda^+$). در ادبیات ضرر گریزی، شواهد نشان می‌دهد که افراد تقریباً دو برابر بیشتر از آن که جذب سودهای یکسان شوند، نسبت به ضرر حساس هستند. برای تخصیص-های کوچک در سهام، احتمال زیان کمتر می‌شود و توابع ارزش منطبق می‌شوند. در رابطه با اثر وزن دهی احتمال، اگر $\gamma = 1$ را تنظیم کنیم، بنابراین اثر آن را خنثی کنیم، به شکل زیر می‌رسیم که تابع مقدار را نشان می‌دهد:



شکل ۴- ارزش چشم انداز و ارزش مطلوب استاندارد به عنوان تابعی از θ

توجه داشته باشید که میزان سرمایه‌گذاری بهینه توسط سرمایه‌گذار رفتاری در دارایی پرریسک به ۴۸ درصد کاهش می‌یابد و بنابراین وزن‌دهی احتمالی تمایل به افزایش ریسک‌پذیری دارد. کانمن و تورسکی (۱۹۷۹) پیشنهاد می‌کنند که اضافه وزن احتمالات کم تأثیر مبهم بر ریسک‌پذیری دارد، زیرا می‌تواند ریسک‌گریزی در حوزه زیان و ریسک‌جویی در حوزه سود را القا کند. در پژوهش حاضر، برآورد بیش از حد احتمالات نتایج مثبت شدید، که در شکل ۳ نشان داده شده است، سرمایه‌گذاران را ترغیب می‌کند تا ریسک بیشتری را بپذیرند.

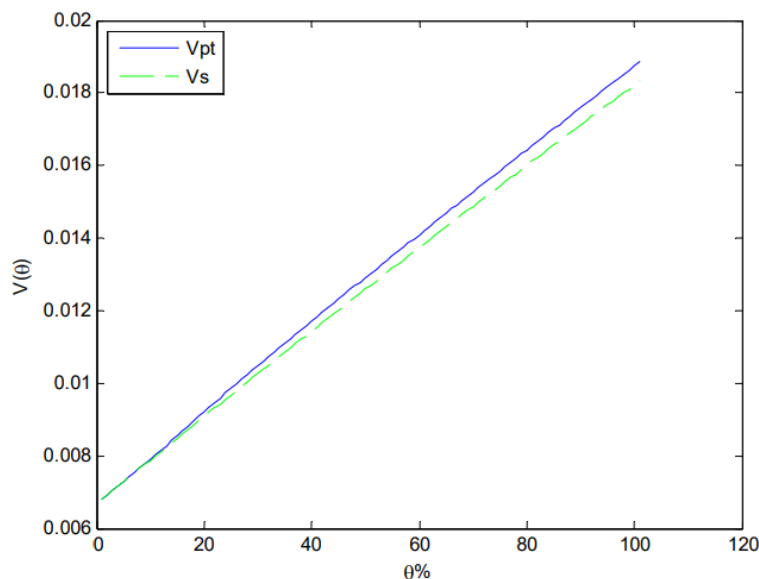
با این حال، علی‌رغم اثرات منفی گریزی از دست دادن و وزن‌دهی احتمال، حتی اگر $\lambda^+ = \lambda^- = 1$ و $\gamma = 1$ را در نظر بگیریم، ثابت نگه داشتن پارامترهای باقی مانده، توابع مقدار مطابقت ندارند، همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود:



شکل ۵- ارزش چشم انداز و ارزش مطلوب استاندارد به عنوان تابعی از θ

هر دو مدل پیش‌بینی می‌کنند که سرمایه‌گذار باید ۱۰۰ درصد از موقوفات خود را در سهام تخصیص دهد. با این حال، توابع ارزش متفاوت است، زیرا، در نظریه آینده‌نگر، افراد به دنبال ریسک در حوزه ضرر هستند (ترجیح ریسک نامتقارن). بنابراین، آن‌ها در تخصیص بخش بیشتری از ثروت خود در دارایی پرخطر راحت‌تر خواهند بود. تابع ارزش چشم‌انداز بزرگتر از تابع مطلوبیت استاندارد است.

اثر اولویت ریسک نامتقارن در جهت مخالف ضرر‌گریزی و وزن‌دهی احتمال می‌رود. هنگامی که ضریب ترجیح ریسک ($\alpha = 0.25$) را در هر دو تابع مطلوبیت کاهش می‌دهیم، اثر عدم تقارن را کاهش می‌دهیم و بنابراین توابع مقدار بسیار نزدیکتر هستند، همانطور که در شکل زیر مشاهده می‌شود.



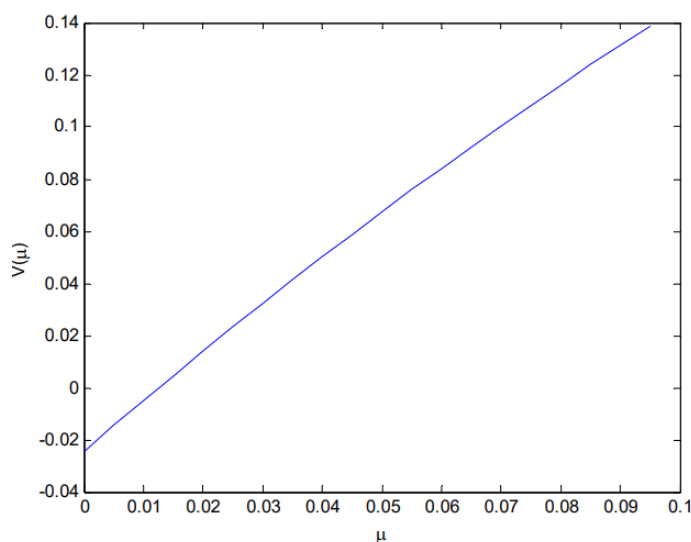
شکل ۶ - ارزش چشم‌انداز و ارزش مطلوب استاندارد به عنوان تابعی از θ

بنابراین اثرات سوگیری‌های رفتاری را می‌توان به صورت موارد اشاره شده خلاصه کرد: ضرر‌گریزی ریسک‌پذیری را کاهش می‌دهد و رفتار ریسک‌پذیری نامتقارن باعث ایجاد نگرش‌های پرخطر می‌شود. وزن‌دهی احتمال تأثیر مبهم بر ریسک دارد. شهود ما این است که در درازمدت، با تغییر پارامترهای تابع مقدار، این سوگیری‌ها از بین می‌روند و افت کارایی ناشی از هر بایاس را حذف می‌کنند. به همین دلیل است که ما استدلال می‌کنیم که سوگیری‌های انسانی برای دستیابی به یک استراتژی سرمایه‌گذاری کارآمد نیازی به تعدیل ندارند.

بنابراین اثرات سوگیری‌های رفتاری را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد: ضرر‌گریزی ریسک‌پذیری را کاهش می‌دهد و رفتار ریسک‌پذیری نامتقارن باعث ایجاد نگرش‌های پرخطر می‌شود. وزن‌دهی احتمال تأثیر مبهم بر ریسک دارد. شهود ما این است که در درازمدت، با تغییر پارامترهای تابع مقدار، این سوگیری‌ها از بین می‌روند و افت کارایی ناشی از هر بایاس را حذف می‌کنند. به همین دلیل است که ما استدلال می‌کنیم که سوگیری‌های انسانی برای دستیابی به یک استراتژی سرمایه‌گذاری کارآمد نیازی به تعدیل ندارند. نتایج تجربی بلاواتسکی و پوگرنا^{۲۳} (۲۰۰۶) نشان می‌دهد که اثر بیزاری از دست دادن تا حد زیادی با اضافه وزن احتمالات کوچک و کم وزنی احتمالات متوسط و زیاد خنثی می‌شود.

²³ Blavatsky and Pogrebna

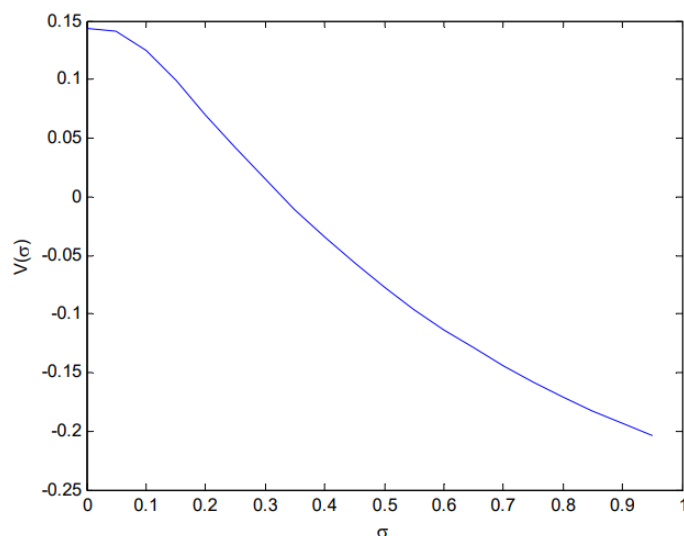
برای تأیید ویژگی (i)، اجازه دهید V را در حالی که μ را تغییر داده و سایر پارامترها را ثابت نگه داریم (با در نظر گرفتن $\theta = 50\%$) ارزیابی کنیم. شکل ۷ نموداری را نشان می‌دهد که نشان می‌دهد در تمام مقادیر مثبت μ ، شیب V مثبت است. تابع مقدار بر حسب μ در حال افزایش است. بنابراین، زمانی که دارایی پرریسک بازده مورد انتظار بالاتری داشته باشد، با ثابت فرض کردن سایر شرایط ارزش بالاتری را برای سرمایه گذار نشان می‌دهد:



شکل ۷ - مقدار چشم انداز به عنوان تابعی از μ

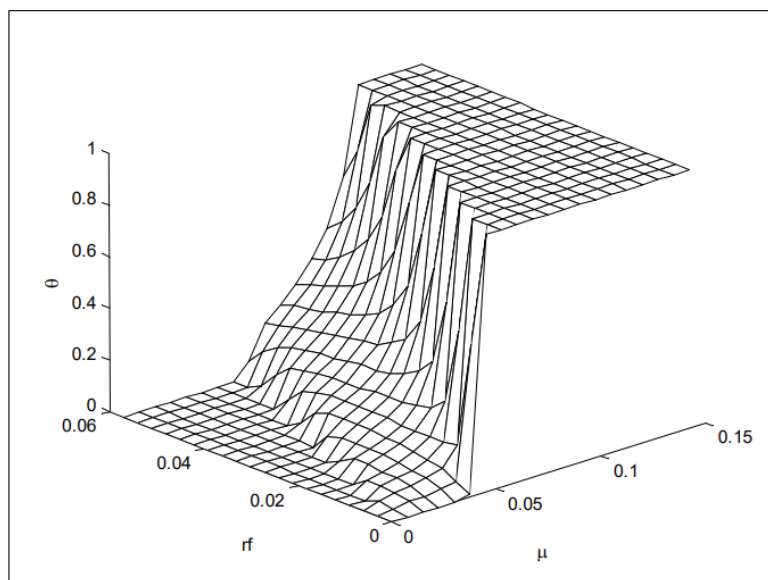
با در نظر گرفتن خصوصیات (ii) و (iii)، اجازه دهید V را با تغییر σ و ثابت نگه داشتن سایر پارامترها (با در نظر گرفتن $\theta = 50\%$) ارزیابی کنیم. شکل ۸ نموداری را نشان می‌دهد که نشان می‌دهد در تمام مقادیر مثبت σ ، شیب V منفی است، در حالی که برای $\sigma = 0$ ، شیب صفر است. هنگامی که σ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، شیب به سمت تهی می‌رود. تابع مقدار در σ در حال کاهش است.

شهود این است که، اگر نوسان دارایی پرخطر بیشتر باشد، برای تخصیص یکسان، احتمال زیان بالاتری وجود دارد که ارزش بالقوه را کاهش می‌دهد. مطابق با سرمایه گذار منطقی سستی، افراد رفتاری نیز بازده بالاتر و ریسک کمتر را ترجیح می‌دهند. عمدتاً به این دلیل که در حوزه سود ریسک گریز هستند و همچنین ضرر گریز هستند.



شکل ۸ - مقدار چشم انداز به عنوان تابعی از σ

حال اجازه دهید هنگام تغییر نرخ بدون ریسک و بازده مورد انتظار دارایی پرخطر، مقادیر θ_0 را ارزیابی کنیم. از آنجایی که پارامترهای زیادی درگیر هستند، یافتن راه حل های شکل بسته برای θ_0 ممکن نیست. بنابراین، ما نتایج عددی را برای تخصیص بهینه ثروت در $t = 0$ ارائه می کنیم. شکل ۹ نتایج را برای $0\% < \mu < 15\%$ و $0\% < R_f < 6\%$ نشان می دهد. پارامترهای باقی مانده ثابت هستند ($\sigma = 12.98\%$ ، $\alpha = 3$ ، $\lambda = 2.25$ ، و $\lambda = 1 +$).



شکل ۹ - تخصیص بهینه حقوق صاحبان سهام در دوره اول به عنوان تابعی از μ و r_f .

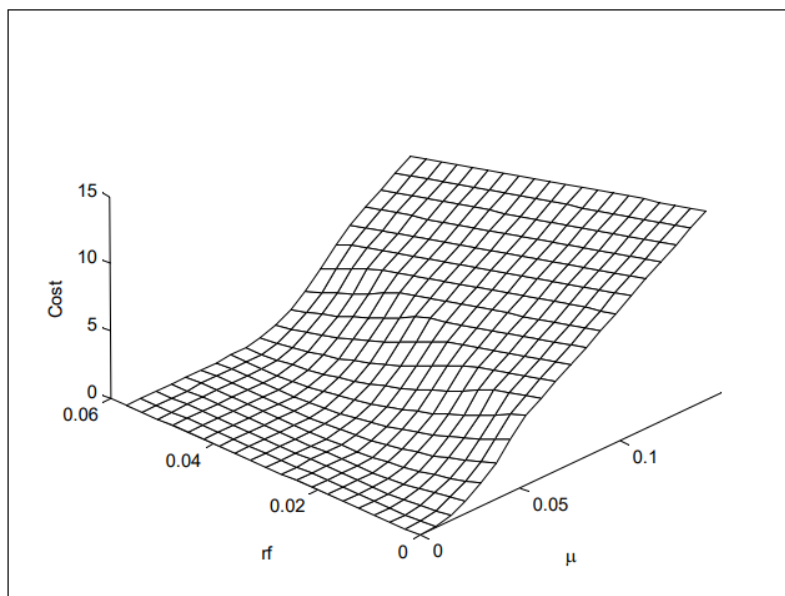
همانطور که انتظار می رود، زمانی که دارایی پرریسک بازدهی جذاب تری ارائه می دهد، نماینده به تدریج بیشتر در سهام سرمایه گذاری می کند. زمانی که سهام بسیار جذاب است، سرمایه گذار تصمیم می گیرد کل ثروت خود را در دارایی پرریسک تخصیص دهد. بنابراین، مشاهده می کنیم که θ_0 در μ افزایش و در R_f کاهش می یابد. همچنین، هنگامی که R_f بالاتر است، تغییرات θ_0 به دلیل تغییر در μ هموارتر است، زیرا در این موارد احتمال تلفات کمتر است و ما به راه حل مطلوبیت استاندارد نزدیک می شویم. هنگامی که R_f پایین تر است، تغییرات در θ_0 به دلیل تغییر در μ ناگهانی تر است و باعث تخصیص پرتفوی شدید می شود. اگر در نظر بگیریم که μ با قطعیت شناخته نشده است، نمونه کارها بسیار ناپایدار خواهد بود. گومز^{۲۴} (۲۰۰۳)، در مدلی با سرمایه گذاران ضرر گریز، دریافته است که افراد سهامی را نگه نمی دارند مگر اینکه حق بیمه سهام کاملاً بالا باشد.

ما می توانیم هزینه مورد انتظار ناکارآمدی مربوط به سوگیری های رفتاری مرتبط با تابع نظریه چشم انداز را برای همان پارامترهای در نظر گرفته شده در تحلیل قبلی، با استفاده از معادله ۱۰ ارزیابی کنیم. نتیجه در شکل ۱۰ ارائه شده است، و شکل آن به این دلیل است که در تابع مطلوبیت استاندارد، سرمایه گذار مایل است ریسک بیشتری نسبت به مطلوبیت چشم انداز متضرر از ضرر بپذیرد. بهای تمام شده به این دلیل است که بازده مورد انتظار سهام بیشتر از اوراق قرضه است و سرمایه گذار ابزار استاندارد بخش بیشتری از دارایی خود را در دارایی پرخطر تخصیص می دهد تا این که فرد سودمند احتمالی را در نظر بگیرد. بنابراین، هزینه بر حسب μ در حال افزایش است. با این حال، شایان ذکر است که هزینه قبلی

²⁴ Gomez

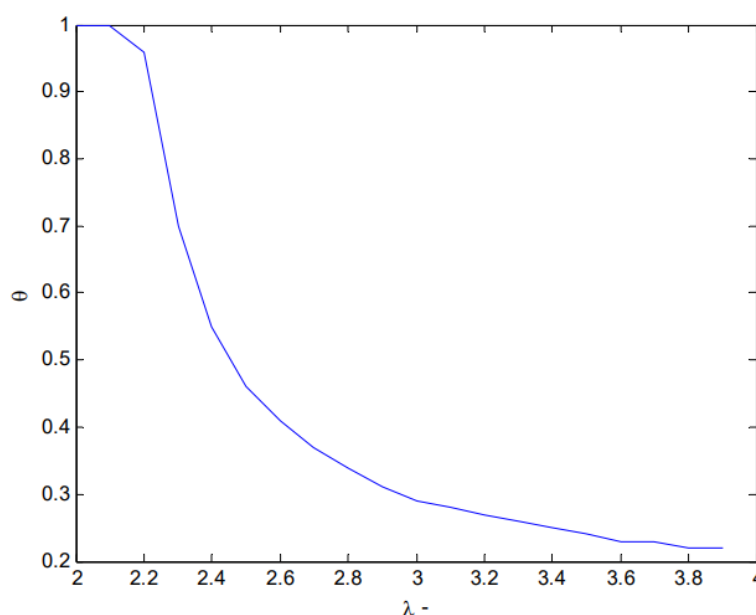
بر اساس بازده مورد انتظار است که در عمل تصادفی است. هزینه واقعی فقط در پایان دوره اول با تحقق بازده سهام قابل مشاهده است.

یک فرضیه مهم را می توان از شکل ۱۰ از نظر بهترین روش برای تخصیص دارایی بدست آورد. تا زمانی که نرخ بدون ریسک کمتر و بازده مورد انتظار سهام بیشتر باشد، تخصیص بهینه باید تعدیل گرایش سرمایه گذاران را تعدیل کند تا به عملکرد بهتری دست یابد کمتر مرتبط است و تخصیص بهینه ممکن است با تعصبات فرد سازگار شود.



شکل ۱۰ - هزینه مورد انتظار در دوره اول به عنوان تابعی از μ و rf .

ما همچنین می توانیم تغییر در تخصیص سهام را زمانی تحلیل کنیم که زیان گریزی را در رفتار ریسک پذیر تغییر دهیم. نتیجه در شکل ۱۱ برای $2 < \lambda^- < 4$ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که تا زمانی که سرمایه گذار نسبت به زیان بیشتر از اینکه جذب سود شود، بیزار است، تخصیص در دارایی پرخطر کمتر است. هنگامی که $\lambda^- = 2.25$ ، تخصیص در دارایی پرخطر مطابق با ۸۱٪ است، همانطور که قبلاً ذکر شد.



شکل ۱۱ - تخصیص بهینه حقوق صاحبان سهام در دوره اول به عنوان تابعی از λ^-

دیموک^{۲۵} (۲۰۰۵) قبلاً نشان داده است که سطح بالاتری از زیان گریزی منجر به قرار گرفتن در معرض سهام کمتر می شود و ناهمگونی در ضریب ضرر گریزی توانایی توضیح ویژگی های گیج کننده رفتار مالی خانوار را دارد.

دوره دوم

به منظور ارزیابی انتخاب تخصیص دوره دوم سرمایه گذار، اجازه دهید برخی از پارامترها را ثابت نگه داریم: $(\sigma = 12.98, \alpha = 3, \lambda^- = 2.25 \text{ and } \lambda^+ = 1)$. پس از اینکه سرمایه گذار تصمیم اول دوره خود را در $t=0$ گرفت، وضعیت طبیعی در $t=1$ ، زمانی که با مشکل دوره دوم خود مواجه می شود، متوجه می شود. مجدداً، او باید ثروت خود را در دو دارایی ممکن در بازار مالی، اوراق قرضه و سهام، تخصیص دهد تا مطلوبیت خود را به حداکثر برساند. همان توزیع عادی را برای بازده دارایی پرتفوی در نظر میگیریم. موقعیت ثروت سرمایه گذار در $t=2$ برابر است با موقعیت او در $t=1$ به اضافه بازده پرتفوی او در دوره دوم.

در حالی که همه عوامل یک مشکل حداکثر سازی را در دوره اول حل می کنند، در دوره دوم به نقطه مرجعی بستگی دارد که او سود و زیان خود را به آن اندازه می گیرد (در چارچوب نظریه چشم انداز). در مدل ما، دو نامزد برای نقطه مرجع سرمایه گذار در $t=1$ وجود دارد: ثروت اولیه او در $t=0$ ($W_0=1$) یا ثروت او در پایان دوره اول، $t=1$ (W_1). سود و زیان خود را نسبت به دارایی خود در $t=1$ اندازه می گیرد (ثروت فعلی او)، او با هر سود و زیان جداگانه برخورد می کند، از طرف دیگر، اگر ثروت اولیه خود را نقطه مرجع در نظر بگیرد، نتایج را جمع می کند و زیانها)، یعنی او موقعیت های خود را خالص می کند.

اول، اجازه دهید به عنوان نقطه مرجع سرمایه گذار، ثروت فعلی او را در $t=1$ در نظر بگیریم. در این صورت، مشکل حداکثر سازی که او در دوره دوم حل می کند، همان مشکل دوره اول است. بنابراین، می توانیم بیان کنیم. سپس تخصیص بهینه دارایی در $t=1$ ، برای دارایی پرخطر θ_1^* ، اگر نماینده سود و زیان خود را نسبت به ثروت فعلی خود اندازه گیری کند، به گونه ای است که همان تابع ارزش دوره اول را به حداکثر می رساند. $\theta_1^* = \theta^*$. ما می توانیم مشاهده کنیم که فردی که سود و زیان خود را نسبت به ثروت فعلی خود اندازه می گیرد، در واقع همان مشکل حداکثر سازی را در هر دوره حل می کند. به همین دلیل است که تخصیص در دارایی پرخطر ممکن است یکسان باشد. از آنجایی که او از اطلاعات گذشته برای به روز رسانی باورهای خود در مورد دارایی ها استفاده نمی کند، ترجیحات او به طور مشابه تحت تأثیر قرار نمی گیرند.

در مرحله بعد، اگر سرمایه گذار سود و زیان خود را نسبت به ثروت اولیه اش ارزیابی کند، اگر دارای موقعیت اولیه ثروت $W_0=100$ باشد و ثروت او در دوره اول به $W_1=110$ افزایش یابد و در دوره بعدی کاهش یابد، مشکل ماکزیم سازی را تحلیل می کنیم. دوره تا $W_2=105$ ، او موقعیت خود را در $t=2$ به عنوان افزایش ۵ ارزش گذاری می کند، و نه به عنوان افزایش ۱۰ و به دنبال آن از ۵ دست دادن.

در دوره دوم، مشکل نماینده شامل تعریف تخصیص ثروت خود (W_1) بین دو دارایی معامله شده در بازار مالی است. دارایی پرخطر و $\theta_1 - 1$ در دارایی ریسک - کمتر همانطور که در تحلیل دوره اول انجام دادیم، فروش کوتاه مدت را نیز محدود می کنیم.

²⁵ Dimock

$$\max_{0 \rightarrow \theta \Omega 1} V = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \frac{d}{dx} \pi(f(x)) dx$$

مشتق زیر را انجام دهیم:

$$x = W_1 [(1 - \theta_1)R_f + \theta_1(\mu + on)] + W_0[(1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1]$$

و $W_1 = W_0[1 + (1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1]$ که در آن R_1 بازده سهام در دوره اول است. بنابراین

$$x = W_0 \left[(1 + (1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1) \cdot ((1 - \theta_1)R_f + \theta_1(\mu + on)) + (1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1 \right]$$

با مرتب کردن مجدد عبارت ها در x و در نظر گرفتن $W_0 = 1$ به دست می آوریم:

$$x = \left[\theta_1 \sigma n \left(1 + ((1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1) \right) + \left(1 + ((1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1) \right) \cdot [(1 - \theta_1)R_f + \theta_1\mu] + ((1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1) \right]$$

$$B = \left[\left(1 + ((1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1) \right) \cdot [(1 - \theta_1)R_f + \theta_1\mu] + ((1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1) \right]$$

$$C = \theta_1 \sigma \left(1 + ((1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1) \right)$$

و سپس $x = B + Cn$, so $x > 0$ implies $n > -\frac{B}{C}$.

$$V = \lambda^- - (\lambda^- + \lambda^-) \pi \left(-\frac{B}{C} \right) + e^{\frac{1}{2}\alpha^2 C^2} \left[\lambda^- e^{\alpha B} \pi \left(-\frac{B}{C} - \alpha C \right) - \lambda^- e^{-\alpha B} \pi \left(\frac{B}{C} - \alpha C \right) \right]$$

تخصیص بهینه دارایی در $t = 1$ ، برای دارایی پرخطر θ_1^* ، اگر نماینده سود و زیان خود را نسبت به ثروت اولیه خود اندازه گیری کند، به گونه ای است که تابع ارزش ارائه شده توسط:

$$V = \lambda^+ - (\lambda^+ + \lambda^-) \pi \left(-\frac{B}{C} \right) + e^{\frac{1}{2}\alpha^2 C^2} \left[\lambda^- e^{\alpha B} \pi \left(-\frac{B}{C} - \alpha C \right) - \lambda^+ e^{-\alpha B} \pi \left(\frac{B}{C} - \alpha C \right) \right]$$

از آنجا که:

$$B = W_0[1 + (1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1] \cdot [(1 - \theta_1^*)R_f + \theta_1^*\mu], C = W_0[1 + (1 - \theta_0)R_f + \theta_0R_1] \cdot \theta_1^*\sigma,$$

θ_0 مقدار تخصیص یافته در دارایی پرخطر در دوره اول است و R بازده مشاهده شده دارایی پرخطر در دوره اول است.

تابع مقداری که باید حداکثر شود نزدیک به یکی از دوره اول است، اما با تغییرات در پارامترهای B و C ، که برای نتیجه دوره قبلی (سود یا ضرر) به حساب می آیند. از آنجایی که ما به رفتار ریسک پذیر سرمایه گذار پس از پی بردن به سود یا زیان علاقه مندیم، اجازه دهید مقادیر θ_1 را هنگامی که بازده کل به دست آمده در دوره اول را تغییر می دهیم،

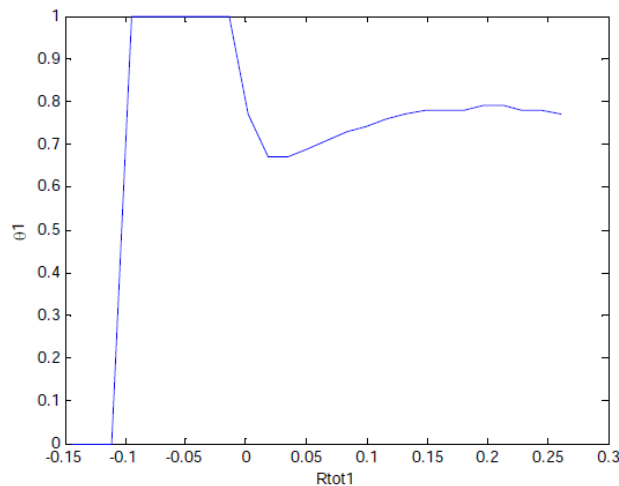
ارزیابی کنیم. به یاد بیاورید که بازده کل از $t=0$ تا $t=1$ (R_{tot1})، هم به انتخاب تخصیص او در $t=0$ و هم به بازده تحقق یافته دارایی پرخطر R_1 بستگی دارد.

$$R_{tot1} = (1 - \theta_0^*)R_f + \theta_0^*R_1$$

θ_1^* را با در نظر گرفتن بازده تحقق یافته سهام در دوره اول که در محدوده زیر متغیر است، ارزیابی کنیم:

$$\mu - 2\sigma < R_1 < \mu + 2\sigma$$

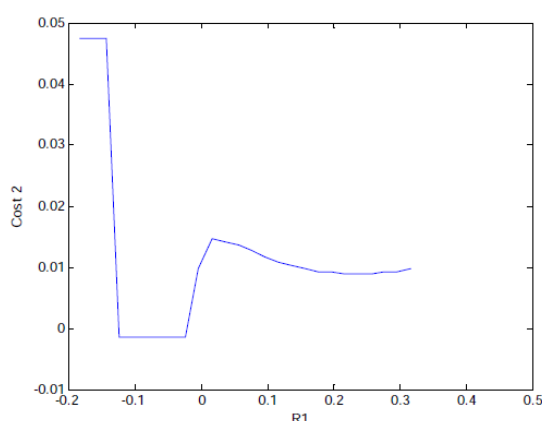
نتایج عددی را برای تخصیص بهینه ثروت، θ_1^* در $t=1$ ارائه می‌کنیم. پارامترهای باقی مانده ثابت هستند ($\mu = 7.61\%, \sigma = 12.98, \alpha = 3, W_0 = 1, \lambda^- = 2.25, \lambda^+ = 1$). شکل ۱۲ نتایج را نشان می‌دهد. یادآوری می‌کنیم که تخصیص بهینه در دارایی پرریسک برای دوره اول با در نظر گرفتن پارامترهای قبلی ۸۱ درصد است. بنابراین، باید بررسی کنیم که آیا تخصیص سهام در دوره دوم بیشتر یا کمتر از ۸۱ درصد است که به ترتیب نشان دهنده ریسک پذیری بیشتر یا کمتر است. ابتدا، توجه داشته باشید که برای بازده کل در دوره اول برابر با صفر (بدون سود / زیان)، این وضعیت همان چارچوبی را تکرار می‌کند که سرمایه گذار در دوره اول با آن مواجه شد. سپس به همان تخصیص بهینه در دارایی پرخطر می‌رسیم (برای $R_{tot1}=0$ و دلالت بر $\theta_1^* = 81\%$).



شکل ۱۲ - تخصیص بهینه حقوق صاحبان سهام در دوره دوم به عنوان تابعی از کل بازده به دست آمده در دوره اول. محیط اطراف ارزش خالص را در نظر بگیرید ($R_{tot1}=0$). اگر سرمایه گذار در دوره اول سودی را تجربه کند، مدل پیش‌بینی می‌کند که در دوره دوم باید به طور بهینه در دارایی پرخطر سرمایه گذاری کند. این رفتار تا جایی که اثر زیان‌گریزی کمتر مشخص می‌شود غالب است. از طرفی اگر در دوره اول ضرری مشاهده شد، باید در دوره بعد ریسک بیشتری کرده و قسمت بیشتری از دارایی خود را در سهام تخصیص دهد. این پیش‌بینی با آزمایش‌های متعددی مطابقت دارد که نشان داده‌اند اثر تمایل به بانک در تنظیمات پویا غالب است و بر و زوکیل (۲۰۰۳). زمانی که سرمایه گذار در دوره اول سودی را تجربه می‌کند، تمایل به کاهش ریسک پذیری خود دارد تا نتیجه قبلی را تضمین کند. از طرف دیگر، اگر در دوره اول باخت را تجربه کند، شرط‌های خود را روی سهام افزایش می‌دهد و سعی می‌کند از ضرر قبلی جلوگیری کند. در مدل، این الگو برای کل دامنه بهره وجود دارد. اما در حوزه ضرر، زیان زیاد در دوره اول ریسک کمتری را در دوره دوم ایجاد می‌کند. شهود این است که اگر سرمایه گذار با زیان بزرگی مواجه شود، اثر زیان‌گریزی بر رفتار ریسک جویی مسلط خواهد شد و باعث کاهش تخصیص بهینه در سهام می‌شود.

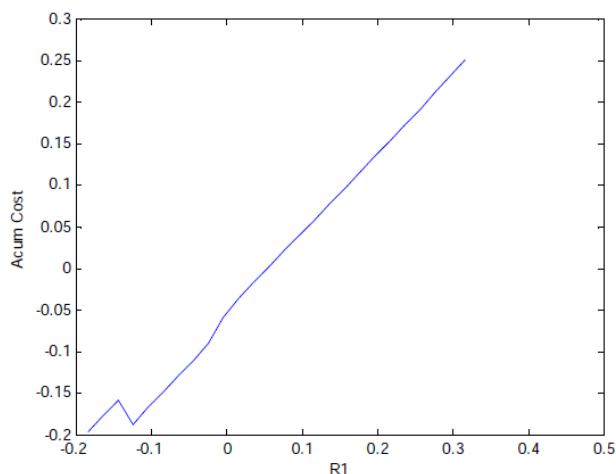
هنگامی که هزینه مورد انتظار (معادله ۱۰) ناکارآمدی رفتاری در دوره دوم را به عنوان تابعی از بازده دارایی پرخطر در

دوره اول ارزیابی می کنیم (شکل ۱۳)، بسته به نتیجه قبلی می توان مشاهده کرد که، هزینه می تواند افزایش یا کاهش یابد. اگر مقدار R_1 به گونه ای باشد که متضمن ضرر کوچک در دوره اول باشد، هزینه حتی منفی است، به این معنی که بازده مورد انتظار در دوره دوم تحت تئوری چشم انداز بیشتر از بازدهی است که با مطلوبیت استاندارد مرتبط است. این مربوط به ریسک پذیری بیشتر افراد تئوری چشم انداز پس از ضرر است، که دلالت بر تخصیص بیشتر در سهام دارد که بازده مورد انتظار بیشتری دارد. اگر R_1 نشان دهنده سود در دوره اول باشد، آنگاه هزینه زمانی مثبت می شود که تخصیص سهام برای سرمایه گذار آب و برق استاندارد بیشتر از فرد شرکت مطلوب باشد. می توانیم نتیجه بگیریم که برای زیان ها در دوره اول، تخصیص بهینه باید با سوگیری های فرد سازگار شود تا به عملکرد بهتری دست یابد، زیرا هزینه در این حوزه منفی است، تخصیص باید تعدیل شود. برای هزینه های مورد انتظار یک مقدار مثبت را مشاهده کنید.



شکل ۱۳ - هزینه مورد انتظار در دوره دوم به عنوان تابعی از بازده حقوق صاحبان سهام در دوره اول.

اگر نتایج هزینه را در دوره های ۱ و ۲ جمع آوری کنیم، نمودار نشان داده شده در شکل ۱۴ را دریافت می کنیم. این نشان می دهد که برای یک نتیجه سهام منفی در دوره اول، یا حتی یک نتیجه اندکی مثبت، فرد تئوری چشم انداز بهتر از سرمایه گذار ابزار استاندارد عمل می کند. و بنابراین، استراتژی تخصیص باید با سوگیری های فردی تطبیق داده شود. نتایج قبلی باید با دقت مورد توجه قرار گیرند زیرا به مقادیر مورد انتظار اشاره می کنند. در بخش ۳، با در نظر گرفتن عملکرد آن افراد در تجزیه و تحلیل خارج از نمونه، مقایسه قوی تری ارائه می دهیم.



شکل ۱۴ - هزینه تجمعی مورد انتظار در دوره دوم به عنوان تابعی از بازده حقوق صاحبان سهام در دوره اول.

تجزیه و تحلیل چند دوره ای

اگر تحلیل دو دوره ای را به یک دوره چند دوره ای تعمیم دهیم، اگر سرمایه گذار ثروت فعلی خود را به عنوان مرجعی که سود و زیان خود را اندازه گیری می کند در نظر بگیرد، همان مشکل حداکثر سازی را برای هر دوره و بهینه حل خواهد کرد. در این شرایط، عامل نزدیک بینی عمل می کند، فقط با در نظر گرفتن سود یا ضرر احتمالی دوره بعدی. به طور کلی، این نتیجه دلالت بر تخصیص سهام کوچک تر در مقایسه با یک سرمایه گذار استاندارد است که هزینه های مورد انتظار مرتبط با سوگیری های نظریه چشم انداز را ایجاد می کند.

از طرف دیگر، اگر نقطه مرجع فرد، ثروت اولیه او باشد (یا ثروت او در یک لحظه در زمان $t = t_1$)، تخصیص مانند گذشته تعریف می شود، اما اکنون نتیجه قبلی را به عنوان کل بازده به دست آمده توسط او در نظر می گیریم. از $t = 0$ (یا از $t = t_1$) تا زمان جاری همانطور که در مدل دو دوره ای بحث شد، تخصیص در دارایی پرخطر به سود و زیان قبلی بستگی دارد و می تواند بزرگتر یا کوچکتر از مورد انتخاب شده باشد.

نمونه گیری مجدد

در بخش های الف (1,2,3) تخصیص بهینه دارایی را بر اساس اولویت های نظریه چشم انداز و با در نظر گرفتن حسابداری ذهنی، زیان گریزی، رفتار ریسک نامتقارن و وزن دهی احتمالی ارزیابی کردیم. با این حال، هنوز یک مسئله مهم در بهینه سازی پرتفو وجود ندارد که آن هم خطای تخمین است. تا به حال، هنگام حل مشکل سرمایه گذار، بازده مورد انتظار را با قطعیت در نظر می گرفتیم، که در واقعیت صادق نیست (مخصوصاً در بازارهای نوظهور که عدم اطمینان بیشتر است، بازده مفروض برای دارایی پرخطر فقط یک برآورد است). و بنابراین ارزش واقعی می تواند متفاوت باشد این مشکل در هر مدلی از بهینه سازی پرتفوی مرتبط است و در تئوری چشم انداز بسیار مهم است، جایی که برای مقادیر پایین تر نرخ بدون ریسک، افزایش اندکی در حق بیمه سهام می تواند منجر به افراطی شود. تخصیص ها اگر بازده واقعی دارایی پرخطر کمتر باشد، احتمال مواجهه با ضرر بیشتر است و باید ارزش آن چشم انداز را به میزان قابل توجهی کاهش دهد.

در تلاش برای غلبه بر این مشکل تخمینی، میچاود^{۲۶} (۱۹۹۸) روش نمونه گیری مجدد را پیشنهاد کرد. نمونه برداری پورتفولیو به تحلیلگر اجازه می دهد تا خطای تخمین را در روش های سنتی بهینه سازی پورتفولیو تجسم کند. فرض کنید که هم واریانس و هم بازده اضافی را با استفاده از مشاهدات N برآورد کردیم. توجه به این نکته مهم است که تخمین های نقطه ای متغیرهای تصادفی هستند و بنابراین نمونه دیگری با همان اندازه از توزیع یکسان به تخمین های متفاوتی منجر می شود.

شرر (۲۰۰۲) پیشنهاد می کند که نمونه برداری از یک توزیع نرمال چند متغیره (یک روش پارامتری که شبیه سازی مونت کارلو را خاتمه می دهد) راهی برای گرفتن خطای تخمین است. از این نظر، بازده و واریانس فقط مقادیر مورد انتظار برای یک توزیع نرمال چند متغیره خواهد بود. اگر فقط دو دارایی را در نظر بگیریم، تابع چگالی احتمال برای یک توزیع نرمال چند متغیره توسط

با تکرار روش نمونه گیری Π بار، Π مجموعه جدید از ورودی های بهینه سازی و سپس تخصیص کارای متفاوت را بدست می آوریم. وزن نمونه گیری مجدد برای یک پورتفولیو به صورت زیر داده می شود:

²⁶ Michaud

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho xy}{(\sigma_x\sigma_y)}\right)\right).$$

پرتفوی های نمونه گیری مجدد باید تنوع بیشتری (دارایی های وارد شده بیشتر در راه حل) را نسبت به نمونه کارآمد متوسط واریانس کلاسیک منعکس کنند، و همچنین باید تغییرات ناگهانی کمتری (انتقالات هموار) در تخصیص ها با تغییر نیازمندی های بازده را نشان دهند. هر دو ویژگی برای سرمایه گذاران مطلوب است.

$$\theta^{\text{Resamp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i$$

ادبیات اخیر نتایج روشنی را به نفع نمونه کارها نمونه برداری مجدد در تجزیه و تحلیل خارج از نمونه نشان داده است (پاولی^{۲۷}، ۲۰۰۵؛ مارکوویتز و اوسمن^{۲۸}، ۲۰۰۳؛ ولف^{۲۹}، ۲۰۰۶؛ جیانو^{۳۰}، ۲۰۰۳). با این حال، هاروی^{۳۱} و همکاران. (۲۰۰۶)، ارزیابی بیز در مقابل. روش های نمونه گیری مجدد، فرض کنید که انتخاب ریسک گریزی منجر به نتایج می شود. کوهلی^{۳۲} (۲۰۰۵) نتیجه می گیرد که، علیرغم این واقعیت که استفاده از نمونه گیری مجدد به عنوان تکنیکی برای بدست آوردن بازده بهتر، مزایا یا معایب غیرقطعی دارد، به نظر می رسد پرتفوی های نمونه گیری مجدد ثبات بالاتر و هزینه های مبادله کمتری را ارائه می دهند که این دو ویژگی حیاتی برای انتخاب سرمایه گذاران بلندمدت است.

سپس BRATE (تکنیک نمونه برداری مجدد رفتار) را به عنوان یک روش جدید برای تعریف تخصیص دارایی پیشنهاد می کنیم، که ایده های رفتاری و تکنیک های نمونه گیری مجدد را در بهینه سازی پورتفولیو ترکیب می کند، بنابراین در این مورد، تخصیص بهینه دارایی باید توسط سازمان داده شود گزاره های قبلی (۱ و ۲ یا ۳، بسته به نقطه مرجع)، اما این روش باید چندین بار برای بازده های مختلف سهام انجام شود (تخصیص دارایی های چند متغیره را می توان به صورت زیر خلاصه کرد).

مرحله ۱: تخمین واریانس - کوواریانس^{۳۳} و بازگشت از ورودی های گذشته.

مرحله ۲: نمونه گیری مجدد از ورودی ها (ایجاد شده در مرحله ۱) با گرفتن Π رسم از توزیع ورودی. تعداد قرعه کشی ها نشان دهنده درجه عدم قطعیت در ورودی ها است. محاسبه واریانس کوواریانس جدید و بازده از سری های نمونه برداری شده. خطای تخمین منجر به تخمین هایی می شود که با برآوردهای به دست آمده در مرحله ۱ متفاوت است.

مرحله ۳: با استفاده از گزاره های مناسب (۱ و ۲ یا ۳، بسته به نقطه مرجع در نظر گرفته شده)، تخصیص بهینه برای ورودی های تعریف شده در مرحله ۲ را محاسبه کنید.

مرحله ۴: پس از چندین بار تکرار مراحل ۲ و ۳، میانگین وزن نمونه کارها را محاسبه کنید. این تخصیص پورتفولیوی BRATE است.

²⁷ Pawley

²⁸ Markowitz and Usmen

²⁹ Wolf

³⁰ Jiao

³¹ Harvey

³² Kohli

³³ Covariance

در بخش بعدی، ما یک تحلیل تجربی ارائه می کنیم که عملکرد تخصیص BRATE را با تخصیص ابزار استاندارد مقایسه می کند.

مطالعه تجربی

داده ها و پیاده سازی

آزمایش های ما براساس داده های روزانه ۲۶ کشور "شاخص های سهام MSCI و نرخ های بدون ریسک، به علاوه شاخص جهانی MSCI، برای دوره ۴ آوریل ۱۹۹۵ تا ۵ ژانویه ۲۰۰۷ است. کشورهای توسعه یافته و بازارهای در حال ظهور (برزیل، شیلی، آفریقای جنوبی، کره جنوبی، تایوان، تایلند، ترکیه) به منظور یافتن نتایج قابل تعمیم در تجزیه و تحلیل گنجانده شده است. بنابراین، ما هم سرمایه گذاران پوشش دار ارزی و هم سرمایه گذاران بدون پوشش را در نظر می گیریم. جدول I برخی از آمار توصیفی هر بازار در نظر گرفته شده را برای کل دوره نمونه ارائه می دهد.

در این جدول آمار توصیفی برای نمونه بازارهای جهانی ارائه شده است. برای هر بازاری که ارائه می کنیم، میانگین نرخ بدون ریسک، میانگین، انحراف استاندارد، کشیدگی بازده سهام، و همچنین شاخص شارپ (مقادیر سالانه). مقادیر به واحد پول کشورها و همچنین به دلار ارائه می شود. نرخ بدون ریسکی که برای محاسبه شاخص شارپ^{۳۴} به دلار استفاده می شود، نرخ صورت حساب ۳ ماهه UST برای همه بازارها است.

جدول- I آمار توصیفی

	Currency						USD					
	Risk Free	Mean	Std.	Skew	Kurt	Sharpe Index	Mean	Std.	Skew	Kurt	Sharpe Index	
T-Bill 3 month	2.722	2.722	0.076	-0.574	1.787	0.000	2.722	0.076	-0.574	1.787	0.000	
'Australia'	3.856	8.971	13.022	-0.322	6.685	0.392	10.105	17.275	-0.125	6.389	0.428	
'Austria'	1.537	11.844	15.790	-0.574	7.277	0.652	12.020	17.816	-0.319	5.626	0.522	
'Belgium'	2.218	10.811	18.065	0.317	9.921	0.476	10.886	19.295	0.163	7.275	0.423	
'Brazil'	16.531	23.184	30.022	0.972	23.667	0.222	17.590	34.552	0.035	8.387	0.430	
'Canada'	2.722	11.516	16.686	-0.426	8.866	0.527	13.230	18.337	-0.532	8.046	0.573	
'Chile'	2.470	7.636	15.309	0.166	7.188	0.337	5.670	18.370	-0.067	6.509	0.161	
'Denmark'	2.218	14.767	17.256	-0.321	5.778	0.727	14.540	17.973	-0.281	5.292	0.657	
'Finland'	2.293	21.269	37.629	-0.162	9.041	0.504	21.118	37.650	-0.101	9.202	0.488	
'France'	2.243	11.516	20.800	-0.048	5.926	0.447	11.416	21.048	-0.012	5.332	0.413	
'Germany'	2.772	10.987	23.172	-0.138	6.244	0.355	10.861	23.232	-0.097	5.337	0.350	
'Ireland'	2.848	10.282	17.956	-0.528	8.877	0.414	10.458	19.676	-0.304	6.763	0.392	
'Italy'	2.974	10.710	20.213	-0.064	6.000	0.383	10.660	20.726	-0.032	5.237	0.383	
'Japan'	0.151	4.536	19.215	0.051	5.152	0.229	2.570	22.234	0.332	6.647	-0.008	
'Netherlands'	2.092	10.156	21.489	-0.076	7.018	0.375	10.004	21.551	-0.006	6.177	0.338	
'Norway'	3.326	12.121	19.635	-0.304	6.706	0.449	12.172	20.767	-0.318	7.104	0.454	
'Portugal'	2.923	9.727	15.801	-0.261	8.097	0.430	9.878	17.664	-0.051	5.834	0.405	
'SouthAfrica'	7.938	12.625	19.769	-0.437	9.002	0.237	8.039	24.810	-0.429	7.053	0.214	
'SouthKorea'	2.318	12.676	34.524	0.271	6.664	0.300	13.709	41.728	1.336	26.151	0.263	
'Spain'	2.797	16.405	21.118	-0.078	6.249	0.644	16.405	21.781	0.031	5.682	0.628	
'Sweden'	2.696	15.473	24.896	0.187	6.700	0.513	16.380	26.850	0.120	6.322	0.509	
'Switzerland'	1.058	12.197	18.051	-0.106	7.639	0.617	11.441	17.713	0.010	6.549	0.492	
'Taiwan'	3.251	4.687	26.244	0.149	5.442	0.054	3.150	27.563	0.110	5.505	0.016	
'Thailand'	3.654	0.076	32.851	1.415	17.779	-0.109	-1.865	36.002	0.984	13.281	-0.128	
'Turkey'	39.514	47.804	45.171	0.324	8.017	0.184	21.521	50.887	0.219	8.094	0.369	
'UnitedKingdom'	3.704	6.779	16.476	-0.153	6.225	0.187	8.392	17.037	-0.100	5.213	0.332	
'UnitedStates'	2.722	9.904	16.978	-0.024	6.598	0.422	9.904	16.978	-0.024	6.598	0.422	
World Index	2.722	7.610	12.976	-0.144	5.763	0.376	7.610	12.976	-0.144	5.763	0.376	

از جدول، ما یک حق بیمه ریسک مرتبط با بازار سهام را، هم با در نظر گرفتن ارزش ها به واحد پول هر کشور و هم به دلار، با میانگین بازده سهام بالاتر از نرخ بدون ریسک مربوطه ارائه می شود.

ابتدا مقادیر واحد پول هر کشور را در نظر بگیریم. متوسط بازده سالانه نرخ بدون ریسک از ۰٫۱۵۱ درصد (ژاپن) تا ۳۹٫۵۱۴ درصد (ترکیه) متغیر است، در حالی که برای شاخص سهام، از ۰٫۰۷۶ (تایلند) درصد متغیر است. به ۴۷٫۸۰۴ درصد (ترکیه) نوسانات سالانه (انحراف استاندارد) بازار سهام از ۱۲٫۹۷۶ درصد (شاخص جهانی) تا ۴۵٫۱۷۱ درصد (ترکیه، کره جنوبی، تایلند و ترکیه) متغیر بود. در کشورهایی مانند انگلستان و ایالات متحده، ارزش آن نزدیک به ۱۶

³⁴ Sharpe Ratio

درصد بوده است ۱ شاخص سالانه شارپ را نشان می دهد که در بازارهای توسعه یافته (حدود ۰,۳۵) بیشتر از بازارهای نوظهور (۰,۱۹) بود که ۰,۳۴ را به عنوان تخمینی از نسبت بلندمدت شارپ برای اقتصاد ایالات متحده نشان می دهد. وقتی مقادیر را به دلار در نظر می گیریم، مثلاً از دیدگاه یک سرمایه گذار بین المللی مستقر در ایالات متحده که سرمایه گذاری های خود را پوشش نمی دهد، به نتایج مشابهی می رسیم که میانگین بازده روزانه به دلار نزدیک به واحد پولی کشور است شواهدی از میانگین جنبه بازگشتی بازار ارز است. با این حال، انحراف معیار در دلار اندکی بیشتر از انحراف در واحد پولی کشور است، زیرا اولی هم ریسک بازار سهام و هم ریسک ارز را شامل می شود (نوسانات نرخ ارز از نظر چولگی و کشش، نتایج قبلی باقی می ماند). با این حال، اکنون شاخص های شارپ تفاوت های مرتبطی را بین بازارهای نوظهور و توسعه یافته نشان نمی دهند. (مثلاً برای برزیل ۰,۴۲۲ و برای ایالات متحده ۰,۴۲۲ است).

در ادامه، عملکرد استراتژی های بهینه سازی زیر را تحلیل می کنیم: سرمایه گذار با اولویت ابزار استاندارد STU. یک سرمایه گذار با اولویت سودمند آینده نگر، با نقطه مرجع داده شده توسط ثروت فعلی او PTU. یک سرمایه گذار با اولویت سودمندی آینده نگر، با نقطه مرجعی که توسط ثروت او در دوره قبلی داده شده است CPT فرض می کنیم. یک سرمایه گذار با ترجیح ابزار استاندارد (نمونه برداری مجدد) RSTU؛ یک سرمایه گذار با اولویت سودمند آینده نگر، با نقطه مرجع داده شده توسط ثروت فعلی او (نمونه برداری مجدد) BRATEa؛ و یک سرمایه گذار با اولویت سودمندی بالقوه، با نقطه مرجعی که توسط ثروت او در دوره قبلی (نمونه گیری مجدد) داده شده است BRATEb. پارامترهای تابع ابزار ثابت هستند ($\alpha = 3$, $\lambda = 2.25$ و $\lambda = 1 +$). ما دوره تخمین (p) را در تجزیه و تحلیل خارج از نمونه تغییر می دهیم. پارامترها با استفاده از مشاهدات بازگشت روزانه p روز گذشته تخمین زده می شوند. پورتفولیوی کارآمد را تعریف می کنیم و آن را برای ماه های بعدی (e) نگه می داریم، سپس پارامترها را مجدداً برآورد کرده و وزن پرتفوی را تنظیم می کنیم. برای قضاوت در مورد عملکرد مالی استراتژی ها، میانگین بازده و نسبت های شارپ تجربی آنها را محاسبه می کنیم.

ب. ۲. نتایج

نسبت های شارپ استراتژی های مختلف در جدول ۲ برای شاخص جهانی و برای کل دوره ۱۹۹۵ تا ۲۰۰۷ با در نظر گرفتن $p = 6$ ماه، ۱، ۲، ۴ سال و e که از ۲ ماه تا ۱ سال متغیر است، ارائه شده است. ما در حال ارزیابی استراتژی های مختلف برای یک سرمایه گذار سهام بین المللی مستقر در ایالات متحده هستیم. نرخ بدون ریسک در نظر گرفته شده، صورت حساب ۳ ماهه بود.

این جدول نسبت شارپ پرتفوی کارآمد تولید شده توسط هر مدل تخمین را نشان می دهد. نسبت شارپ با تقسیم بازده اضافی مشاهده شده بر انحراف استاندارد محاسبه می شود.

جدول II – نسبت های شارپ

	STU	PTU	CPT	RSTU	BRATEa	BRATEb
6m-2m	0.189	0.134	0.136	0.207	0.154	0.156
6m-6m	0.101	0.080	0.083	0.125	0.102	0.114
1y-6m	0.439	0.392	0.392	0.438	0.400	0.401
2y-6m	0.462	0.426	0.421	0.464	0.434	0.423
4y-6m	-0.135	-0.023	-0.023	-0.122	-0.018	-0.019
1y-1y	0.413	0.347	0.389	0.420	0.354	0.393
2y-1y	0.456	0.428	0.431	0.461	0.444	0.465
4y-1y	-0.206	-0.126	-0.126	-0.193	-0.114	-0.113
mean	0.215	0.207	0.213	0.225	0.219	0.227

به طور کلی، می توان گفت که مدل های نمونه گیری مجدد نتایج بهتری را برای سرمایه گذار محدود فروش کوتاه ارائه می دهند. این یک نتیجه مورد انتظار است زیرا مدل های نمونه گیری مجدد ریسک تخمین را در نظر می گیرند و سبب متنوع تری ایجاد می کنند که تمایل دارد در مطالعات خارج از نمونه عملکرد بهتری داشته باشد. بالاترین نسبت شارپ توسط مدل BRATEb برای دوره تخمین ۲ سال و دوره ارزیابی ۱ سال (۰,۴۶۵) به دست آمد. به طور متوسط مدل های نمونه گیری مجدد نسبت شارپ را در حدود ۰,۱۰ در مقایسه با مدل های قطعی افزایش می دهند. همچنین، در حالی که به نظر می رسد سرمایه گذار STU (R) بهتر از PTU (R) عمل می کند، با CPT (R) اتفاق نمی افتد. اگر فقط کل بازده به دست آمده توسط هر استراتژی را در نظر بگیریم، نتایج ارائه شده در جدول III را می یابیم. در این مورد، می توان یک هزینه ناکارآمدی مربوط به سرمایه گذاران رفتاری را استنباط کرد، که تمایل دارند نتایج سرمایه گذار ابزار استاندارد را در حدود ۱۰ واحد در ثانیه عملکرد کمتری داشته باشند، اما اگر افزایش ریسک را در نظر بگیریم (معیار تنظیم شده با ریسک مانند Shape نسبت)، ناکارآمدی از بین می رود. این جدول میانگین کل بازده پرتفوی کارآمد تولید شده توسط هر مدل برآورد را نشان می دهد.

جدول III - میانگین بازده کل

	STU	PTU	CPT	RSTU	BRATEa	BRATEb
6m-2m	4.302	3.781	3.822	4.447	3.935	3.976
6m-6m	3.654	3.449	3.476	3.883	3.643	3.749
1y-6m	6.670	6.211	6.211	6.632	6.238	6.242
2y-6m	7.377	6.987	6.875	7.345	6.910	6.775
4y-6m	1.065	2.083	2.083	1.064	1.992	1.993
1y-1y	6.711	5.981	6.295	6.630	5.979	6.341
2y-1y	7.247	6.935	6.966	7.289	7.068	7.194
4y-1y	0.419	1.226	1.226	0.530	1.287	1.297
mean	4.681	4.582	4.619	4.727	4.631	4.696

بر اساس نتایج قبلی، می توان گفت که مدل های نمونه گیری مجدد تمایل به عملکرد بهتر از مدل های سنتی دارند. همچنین، حداقل برای سرمایه گذار CPT، هیچ مزیت واضحی از سرمایه گذاران ابزار استاندارد نسبت به سرمایه گذاران نظریه چشم انداز رفتاری وجود ندارد. لوی و لوی (۲۰۰۴) به نتیجه مشابهی دست یافتند و اظهار داشتند که تفاوت های عملی بین نظریه چشم انداز و نظریه میانگین واریانس سنتی جزئی است. از این نظر، سوگیری های رفتاری نباید تعدیل شوند، و همچنین نباید مدل های استاندارد را به گونه ای تطبیق داد که سوگیری های رفتاری را شامل شود. هنگامی که هر بازار را به طور جداگانه در نظر می گیریم، نتایج ارائه شده در جدول IV را می یابیم (با توجه به هر کشور به صورت جداگانه، تسلط واضحی بر یک استراتژی وجود ندارد). مدل های بازنمونه شده معمولاً از مدل های سنتی در بازارهای نوظهور بهتر عمل می کنند (به نتایج برزیل، شیلی، آفریقای جنوبی، کره جنوبی، تایوان، تایلند و ترکیه توجه کنید)، جایی که عدم اطمینان در مورد تخمین ریسک/بازده بیشتر است. این جدول نسبت شارپ پرتفوی کارآمد تولید شده را با در نظر گرفتن یک دوره تخمینی ۱ ساله و دوره ارزیابی ۶ ماهه (به واحد پولی هر کشور) نشان می دهد. نسبت شارپ با تقسیم بازده اضافی مشاهده شده بر انحراف استاندارد محاسبه می شود.

جدول IV - نسبت های شارپ

	STU	PTU	CPT	RSTU	BRATEa	BRATEb
'Australia'	0.309	0.352	0.353	0.309	0.346	0.345
'Austria'	0.629	0.578	0.584	0.618	0.593	0.597
'Belgium'	0.977	0.982	0.973	0.982	0.986	0.977
'Brazil'	0.323	0.326	0.304	0.335	0.333	0.317
'Canada'	0.490	0.490	0.490	0.490	0.488	0.489
'Chile'	0.729	0.726	0.721	0.735	0.740	0.736
'Denmark'	0.914	0.914	0.914	0.908	0.910	0.909
'Finland'	0.696	0.685	0.638	0.691	0.658	0.665
'France'	0.778	0.790	0.755	0.780	0.785	0.764
'Germany'	0.619	0.614	0.619	0.619	0.616	0.616
'Ireland'	0.615	0.607	0.636	0.626	0.607	0.634
'Italy'	0.737	0.769	0.740	0.733	0.753	0.726
'Japan'	0.041	0.080	0.042	0.057	0.051	0.040
'Netherlands'	0.657	0.655	0.657	0.657	0.654	0.655
'Norway'	0.389	0.368	0.368	0.402	0.398	0.398
'Portugal'	0.751	0.685	0.728	0.764	0.716	0.738
'SouthAfrica'	0.161	0.206	0.218	0.167	0.208	0.224
'SouthKorea'	0.101	0.019	0.035	0.111	0.066	0.058
'Spain'	0.932	0.949	0.954	0.930	0.936	0.936
'Sweden'	0.634	0.631	0.631	0.643	0.634	0.633
'Switzerland'	0.773	0.720	0.739	0.773	0.739	0.748
'Taiwan'	-0.001	-0.003	0.000	-0.004	-0.005	-0.004
'Thailand'	0.041	-0.012	-0.048	0.055	0.033	0.018
'Turkey'	0.183	0.189	0.094	0.185	0.190	0.103
'UnitedKingdom'	0.411	0.428	0.423	0.411	0.429	0.426
'UnitedStates'	0.618	0.624	0.626	0.615	0.623	0.616
'World Index'	0.439	0.392	0.392	0.438	0.400	0.401

از نظر مقایسه بین استاندارد و سرمایه گذار سودمند، عموماً اولی از دومی بهتر عمل نمی کند، که نشان دهنده عدم تسلط واضح مدل عقلایی سنتی است تئوری چشم انداز، زیرا هیچ کارایی مالی اضافی به دست نمی آید.

به طور کلی، یک یافته جالب این واقعیت است که همه مدل های تخصیص قبلی از استراتژی ۱۰۰٪ پرخطر بهتر عمل می کنند. نسبت شارپ در استراتژی سهام ۱۰۰٪/۰٫۳۸۳ بود، در حالی که همه مدل های نمونه گیری مجدد به طور متوسط به نتیجه بالاتر از ۰٫۵۰۹ رسیدند.

در نهایت، اگر مقادیر به دلار را در نظر بگیریم و با توجه به اینکه سرمایه گذار با ریسک ارزی مواجه است، به نتایج ارائه شده در جدول ۵ می رسیم.

این جدول نسبت شارپ پرتفوی کارآمد تولید شده را با در نظر گرفتن یک دوره تخمینی ۱ ساله و دوره ارزیابی ۶ ماهه (مقادیر به دلار) ارائه می دهد. نسبت شارپ با تقسیم بازده اضافی مشاهده شده بر انحراف استاندارد محاسبه می شود.

جدول V - نسبت های شارپ

	STU	PTU	CPT	RSTU	BRATEa	BRATEb
'Australia'	0.589	0.567	0.564	0.591	0.595	0.591
'Austria'	0.896	1.015	1.015	0.882	0.971	0.977
'Belgium'	0.904	0.904	0.904	0.886	0.886	0.899
'Brazil'	0.656	0.653	0.653	0.669	0.675	0.668
'Canada'	0.421	0.421	0.421	0.423	0.420	0.420
'Chile'	0.752	0.757	0.757	0.774	0.776	0.775
'Denmark'	0.781	0.754	0.820	0.776	0.773	0.803
'Finland'	0.612	0.596	0.597	0.613	0.597	0.593
'France'	0.654	0.643	0.625	0.649	0.625	0.629
'Germany'	0.533	0.509	0.521	0.537	0.502	0.516
'Ireland'	0.654	0.593	0.600	0.641	0.620	0.618
'Italy'	0.674	0.614	0.640	0.681	0.638	0.664
'Japan'	0.195	0.181	0.194	0.198	0.175	0.182
'Netherlands'	0.645	0.655	0.656	0.645	0.653	0.654
'Norway'	0.351	0.387	0.387	0.361	0.381	0.380
'Portugal'	0.666	0.641	0.641	0.669	0.647	0.660
'SouthAfrica'	0.465	0.441	0.456	0.479	0.459	0.460
'SouthKorea'	0.226	0.222	0.189	0.233	0.230	0.191
'Spain'	0.858	0.899	0.899	0.862	0.892	0.894
'Sweden'	0.562	0.558	0.566	0.563	0.554	0.565
'Switzerland'	0.599	0.531	0.552	0.596	0.607	0.612
'Taiwan'	-0.090	-0.100	-0.086	-0.083	-0.095	-0.076
'Thailand'	0.104	0.040	0.030	0.114	0.108	0.096
'Turkey'	0.288	0.250	0.238	0.296	0.267	0.246
'UnitedKingdom'	0.625	0.574	0.605	0.632	0.597	0.626
'UnitedStates'	0.618	0.624	0.626	0.612	0.615	0.612
'World Index'	0.439	0.392	0.392	0.438	0.400	0.401

مجدداً، نتایج حاکی از غلبه مدل های نمونه گیری مجدد در بازارهای نوظهور است، در حالی که برای کشورهای توسعه یافته، تسلط واضحی مشاهده نمی شود. مدل عقلانی سنتی از مدل های رفتاری بهتر عمل نمی کند. در نهایت، هر شش مدل پویا در مقایسه با یک فرد ۱۰۰٪ سهام سرمایه گذاری شده، برای سرمایه گذار ارزش اضافه می کنند. توجه داشته باشید که نسبت شارپ یافت شده برای بازارهای مختلف (هم به ارز کشور و هم به دلار) به طور قابل توجهی بالاتر از موارد ارائه شده در جدول ۱ است.

به طور خلاصه، مدل های نمونه گیری مجدد، که ریسک تخمین را در نظر می گیرند، تمایل به عملکرد بهتر از مدل های قطعی دارند، به ویژه برای بازارهای نوظهور که عدم قطعیت برآورد بازده مورد انتظار بالاتر است. علاوه بر این، سرمایه گذاران سودمند نظریه چشم انداز در مقایسه با سرمایه گذاران منطقی سنتی به بازده بدتری نمی رسند، که نشان دهنده عدم نیاز به پرداختن به تعدیل سوگیری در تخصیص پرتفوی است.

نتیجه گیری

این مطالعه دو هدف داشت: اول گنجاندن حسابداری ذهنی، ضرر گریزی، رفتار ریسک پذیری نامتقارن، و وزن دهی احتمالی در بهینه سازی سبد سرمایه گذاران. و دوم در نظر گرفتن ریسک تخمینی در تحلیل. با در نظر گرفتن داده های روزانه شاخص سهام از ۲۶ کشور در دوره ۱۹۹۵ تا ۲۰۰۷، ما به طور تجربی مدل خود (BRATE) تکنیک نمونه گیری مجدد رفتار (را در برابر مارکویتز سنتی ارزیابی کردیم. چندین دوره برآورد و ارزیابی مورد استفاده قرار گرفت و همچنین یک استراتژی پوشش ارزی و یک استراتژی غیر پوششی را در نظر گرفتیم.

نتایج ما از استفاده از BRATE به عنوان جایگزینی برای تعریف تخصیص بهینه دارایی پشتیبانی می کند و فرض می کند که یک مدل بهینه سازی پورتفولیو ممکن است با سوگیری های فردی که در تئوری چشم انداز ذکر شده است، سازگار شود. به نظر نمی رسد که تعصبات رفتاری کارایی را کاهش دهند، این نتیجه برای بازارهای مختلف توسعه یافته

و نوظهور قوی است.

به عنوان گسترش بیشتر تحقیق حاضر، ما گنجاندن چندین دارایی پرخطر در تجزیه و تحلیل را پیشنهاد می‌کنیم. در این مورد، موضوع حسابداری ذهنی چندگانه موضوعی حیاتی برای رسیدگی به مشکل است. سرمایه‌گذاری که هر اوراق بهادار را در حساب ذهنی خود ارزیابی می‌کند، لزوماً اوراق بهادار اضافی را اضافی نمی‌داند، که به طور چشمگیری پیچیدگی مشکل را افزایش می‌دهد.

ما همچنین این سؤال را مطرح نمی‌کنیم که چگونه افراد به توزیع بازده اساسی می‌رسند. این مدلی است که در بالا مکانیسم پیشنهادی برای اینکه چگونه افراد می‌توانند توزیع احتمال معین (فرض می‌شود که نمایش دقیقی از توزیع اساسی است) را به وزن‌های تصمیم تبدیل کنند، پیشنهاد شده است. هنگامی که عدم قطعیت را معرفی می‌کنیم، می‌تواند سوگیری‌های فردی، ذهنیت و خطا را القا کند. شواهدی وجود دارد که نشان می‌دهد وقتی از افراد خواسته می‌شود یک ارزیابی ذهنی از توزیع احتمال ارائه دهند، اعتماد بیش از حد قابل توجهی نشان می‌دهند. علاوه بر این، این که آیا وزن‌های ارائه شده توسط CPT واقعاً منعکس کننده فرآیندی است که توسط آن افراد توزیع‌های احتمال پیوسته را ارزیابی می‌کنند، جای سؤال دارد.

عاملی که سود و زیان خود را همیشه نسبت به ثروت فعلی‌اش اندازه می‌گیرد، همان مشکل حداکثرسازی را در هر دوره حل می‌کند، بنابراین یک استراتژی ترکیبی را انتخاب می‌کند. یک سؤال باز باقی می‌ماند، اگر یک استراتژی ترکیبی ثابت می‌تواند علت اثر گرایش باشد.

منابع

- [۱] N. Barberis and M. Huang, "Mental accounting, loss aversion, and individual stock returns," *the Journal of Finance*, vol. ۵۶, no. ۴, pp. ۱۲۹۲-۱۲۴۷, ۲۰۰۱.
- [۲] N. Barberis, M. Huang, and T. Santos, "Prospect theory and asset prices," *The quarterly journal of economics*, vol. ۱۱۶, no. ۱, pp. ۵۳-۱, ۲۰۰۱.
- [۳] S. Benartzi and R. H. Thaler, "Myopic loss aversion and the equity premium puzzle," *The quarterly journal of Economics*, vol. ۱۱۰, no. ۱, pp. ۹۲-۷۳, ۱۹۹۵.
- [۴] S. Benninga, *Financial modeling*. MIT press, ۲۰۱۴.
- [۵] P. R. Blavatsky and G. Pogrebna, "Myopic loss aversion revisited: the effect of probability distortions in choice under risk," ۲۰۰۶.
- [۶] A. Bosch-Domènech and J. Silvestre, "Reflections on gains and losses: A 2×2 experiment," *Journal of Risk and Uncertainty*, vol. ۳۳, no. ۳, pp. ۲۳۵-۲۱۷, ۲۰۰۶. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/۴۱۷۶۱۲۴۸>.
- [۷] G. B. Davies and S. E. Satchell, "Continuous cumulative prospect theory and individual asset allocation," Faculty of Economics, University of Cambridge, ۲۰۰۴.
- [۸] E. De Giorgi, T. Hens, and H. Levy, "Existence of CAPM equilibria with prospect theory preferences," *Preprint*, vol. ۱۵۷, ۲۰۰۴.
- [۹] S. G. Dimmock and R. Kouwenberg, "Loss-aversion and household portfolio choice," *Journal of Empirical Finance*, vol. ۱۷, no. ۳, pp. ۴۵۹-۴۴۱, ۰۱/۰۶/۲۰۱۰/ ۲۰۱۰, doi: <https://doi.org/۱۰.۱۰۱۶/j.jempfin.۲۰۰۹.۱۱.۰۰۵>.
- [۱۰] J. L. B. Fernandes, A. Hasman, and J. I. Peña, "Risk premium: insights over the threshold," *Applied Financial Economics*, vol. ۱۸, no. ۱, pp. ۵۹-۴۱, ۲۰۰۸ ۰۱/۰۱/۲۰۰۸, doi: ۰.۹۶۰۳۱۰۰۶۰۱۰۱۸۸۴۹/۱۰, ۱۰۸۰.
- [۱۱] J. L. B. Fernandes, J. Ignacio Pena, and B. Miranda Tabak, "Behaviour finance and estimation risk in stochastic portfolio optimization," *Applied financial economics*, vol. ۲۰, no. ۹, pp. ۷۳۸-۷۱۹, ۲۰۱۰.

- [۱۲] F. J. Gomes, "Portfolio choice and trading volume with loss-averse investors," *The Journal of Business*, vol. ۷۸, no. ۲, pp. ۷۰۶-۷۷۵, ۲۰۰۵
- [۱۳] W. Jiao, "Portfolio resampling and efficiency issues," Humboldt-Universität zu Berlin, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, ۲۰۰۳
- [۱۴] P. Jorion, "Bayes-Stein estimation for portfolio analysis," *Journal of Financial and Quantitative analysis*, vol. ۲۱, no. ۳, pp. ۲۹۲-۲۷۹, ۱۹۸۶
- [۱۵] D. Kahneman and A. Tversky, "Prospect theory: An analysis of decision under risk," in *Handbook of the fundamentals of financial decision making: Part I*: World Scientific, ۲۰۱۳, pp. ۱۲۷-۹۹
- [۱۶] A. Kempf, K. Kreuzberg, and C. Memmel, "How to incorporate estimation risk into Markowitz optimization," in *Operations Research Proceedings ۲۰۰۱: Selected Papers of the International Conference on Operations Research (OR ۲۰۰۱) Duisburg, September ۳-۵, ۲۰۰۱, ۲۰۰۲*: Springer, pp. ۱۸۲-۱۷۵
- [۱۷] J. Kohli, "An empirical analysis of resampled efficiency," Citeseer, ۲۰۰۵
- [۱۸] H. Levy and M. Levy, "Prospect theory and mean-variance analysis," *Review of financial studies*, vol. ۱۷, no. ۴, pp. ۱۰۴۱-۱۰۱۵, ۲۰۰۴
- [۱۹] A. W. Lo, D. V. Repin, and B. N. Steenbarger, "Fear and greed in financial markets: A clinical study of day-traders," *American Economic Review*, vol. ۹۵, no. ۲, pp. ۳۵۹-۳۵۲, ۲۰۰۵
- [۲۰] T. Ma, *The Review of Financial Studies*, vol. ۱۴, no. ۳, pp. ۹۰۴-۹۰۱, ۲۰۰۱. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/۲۶۹۶۷۷۷>.
- [۲۱] P. J. Maenhout, "Robust portfolio rules and asset pricing," *Review of financial studies*, vol. ۱۷, no. ۴, pp. ۹۸۳-۹۵۱, ۲۰۰۴
- [۲۲] A. Magi, "Financial Decision-making and Portfolio Choice under Behavioral Preferences: Implications for the Equity Home Bias Puzzle," Available at SSRN ۷۲۵۵۲۱, ۲۰۰۵
- [۲۳] H. Markowitz, "Portfolio Selection," *The Journal of Finance*, vol. ۷, no. ۱, pp. ۹۱-۷۷, ۱۹۵۲, doi: ۲۹۷۵۹۷۴/۱۰,۲۳۰۷
- [۲۴] H. M. Markowitz and N. Usmen, "Resampled frontiers versus diffuse bayes: an experiment," *The world of risk management*, vol. ۱, no. ۴, p. ۱۸۳, ۲۰۰۶
- [۲۵] R. Michaud and R. Michaud, "Discussion on article by Campbell R. Harvey, John C. Liechty and Merrill W. Liechty, Bayes vs. Resampling: A Rematch (۲۰۰۸, Volume ۶, Number ۱)," *Journal of Investment Management*, vol. vol ۶, ۲۰۰۸ ۰۱/۰۱
- [۲۶] T. Odean, "Are investors reluctant to realize their losses?," *The Journal of finance*, vol. ۵۳, no. ۵, pp. ۱۷۹۸-۱۷۷۵, ۱۹۹۸
- [۲۷] B. Scherer, "Portfolio Resampling: Review and Critique," *Financial Analysts Journal*, vol. ۵۸, no. ۶, pp. ۱۰۹-۹۸, ۲۰۰۲ ۰۱/۱۱/۲۰۰۲, doi: /۱۰,۲۴۶۹faj.v۵۸.n.۶,۲۴۸۹
- [۲۸] U. Schmidt and H. Zank, "What is loss aversion?," *Journal of risk and uncertainty*, vol. ۳۰, pp. ۱۶۷-۱۵۷, ۲۰۰۵
- [۲۹] H. Shefrin, *A behavioral approach to asset pricing*. Elsevier, ۲۰۰۸
- [۳۰] H. Shefrin and M. Statman, "The disposition to sell winners too early and ride losers too long: Theory and evidence," *The Journal of finance*, vol. ۴۰, no. ۳, pp. ۷۹۰-۷۷۷, ۱۹۸۵
- [۳۱] P. St-Amour, "Benchmarks in aggregate household portfolios," *Swiss Finance Institute Research Paper*, no. ۰۹-۰۷, ۲۰۰۶
- [۳۲] J. ter Horst, F. De Rooy, and B. J. Werker, "Incorporating estimation risk in portfolio choice," *Advances in Corporate Finance and Asset Pricing*. Elsevier, Amsterdam, pp. -۴۴۹ ۴۷۲, ۲۰۰۶
- [۳۳] R. H. Thaler, "Mental accounting matters," *Journal of Behavioral decision making*, vol. ۱۲, no. ۳, pp. ۲۰۶-۱۸۳, ۱۹۹۹

- [۳۴] R. H. Thaler and E. J. Johnson, "Gambling with the house money and trying to break even: The effects of prior outcomes on risky choice," *Management science*, vol. ۳۶, no. ۶, pp. ۶۶۰-۶۶۳, ۱۹۹۰.
- [۳۵] A. Tversky and D. Kahneman, "Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty," *Journal of Risk and uncertainty*, vol. ۵, pp. ۲۲۳-۲۹۷, ۱۹۹۲.
- [۳۶] M. Vlcek, "Portfolio choice with loss aversion, asymmetric risk-taking behavior and segregation of riskless opportunities," *Swiss Finance Institute Research Paper*, no. ۲۷, ۲۰۰۶.
- [۳۷] M. Weber and C. F. Camerer, "The disposition effect in securities trading: An experimental analysis," *Journal of Economic Behavior & Organization*, vol. ۳۳, no. ۲, pp. ۱۸۴-۱۶۷, ۱۹۹۸.
- [۳۸] M. Weber and H. Zuchel, "How do prior outcomes affect risk attitude? Comparing escalation of commitment and the house-money effect," *Decision Analysis*, vol. ۲, no. ۱, pp. ۴۳-۳۰, ۲۰۰۵.
- [۳۹] M. Wolf, "Resampling vs. shrinkage for benchmarked managers," *Shrinkage for Benchmarked Managers (July ۲۰۰۴)*, ۲۰۰۴.
- [۴۰] C. Zimmer, M. Niederhauser, and M. E. d. Silva, "Determining an efficient frontier in a stochastic moments setting," ۲۰۰۸.